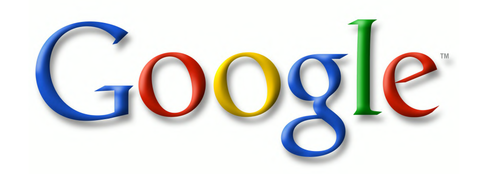





Stanford University Libraries
3 6105 000 993 282

(4)

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Unter Mitwirkung des Herrn

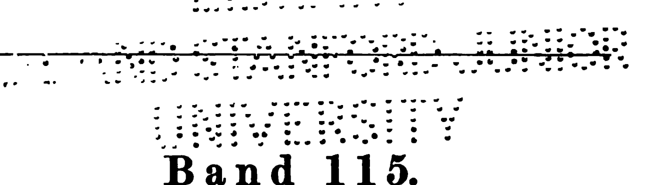
Weierstrass

herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.



Band 115.

In vier Heften.

Mit einer Figurentafel.

Berlin, 1895.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des Bandes 115.

Ueber gewisse Flächen vierter Ordnung (Isogonalflächen).

(Hierzu Tafel I.)

(Von Herrn *Lothar Heffter* in Giessen.)

Einleitung.

Sind in einer Ebene zwei feste Punkte P_1, P_2 gegeben, so ist der geometrische Ort derjenigen dritten Punkte P, deren Verbindungslinien mit P_1 und P_2 sich jedesmal unter dem gleichen Winkel φ schneiden, das System zweier Kreise durch P_1 und P_2. Man könnte dieses System der zwei Kreise, das eine ebene Curve vierter Ordnung bildet, deshalb die ***Isogonalcurve der Punkte P_1 und P_2 für den Winkel φ*** nennen. Je nachdem dabei der Winkel $\varphi \lessgtr \frac{\pi}{2}$, entsprechen die beiden von P_1P_2 begrenzten grösseren oder kleineren Kreisbogenstücke dem Winkel φ selbst, die beiden anderen dagegen dem Supplementwinkel $\pi-\varphi$, in dem Sinne, dass je nach der Lage von P auf den ersteren oder letzteren Kreisbogenstücken $\angle P_1PP_2 = \varphi$ oder $\pi-\varphi$ ist. Beide Kreise fallen zusammen und die Kreisbogenstücke werden Halbkreise für $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Der Kreis über P_1P_2 als Durchmesser — den man speciell ***Orthogonalcurve*** von P_1P_2 nennen könnte — theilt daher auch die Isogonalcurve von P_1P_2 für irgend einen Winkel φ $\left(\gtrless \frac{\pi}{2}\right)$ in die beiden Theile, welche bezw. diesem Winkel selbst und seinem Supplement entsprechen, indem, wenn φ spitz ist, der erstere Theil ausserhalb, der letztere innerhalb dieses Kreises liegt.

Es liegt nahe, analoge Fragen für den Raum aufzustellen, die bisher abgesehen von einem Specialfall eine besondere Behandlung noch nicht erfahren zu haben scheinen. Eine solche dürfte aber aus doppeltem Grunde berechtigt sein; einmal, weil man trotz der grossen Einfachheit des Problems zu interessanten Flächenformen, namentlich zu Regelflächen vierter Ordnung,

geführt wird, und dann auch, weil eine praktische Anwendbarkeit der Untersuchung keineswegs ausgeschlossen erscheint.

Wir wollen den geometrischen Ort der Punkte P im Raume, deren Verbindungslinien mit zwei festen Punkten P_1 und P_2 sich stets unter dem gleichen Winkel φ schneiden, die *Isogonalfläche der Punkte P_1 und P_2 für den Winkel φ* nennen und mit $J_\varphi(P_1P_2)$ bezeichnen. — Sind eine Gerade g und ein Punkt A ausserhalb derselben gegeben, so bestimmt jeder weitere Punkt P im Raume mit g eine Ebene (Pg), mit A eine Gerade (PA); den geometrischen Ort derjenigen Punkte P, für die der Winkel jener Ebene und dieser Geraden stets der gleiche, φ, ist, nennen wir *Isognalfläche der Geraden g und des Punktes A für den Winkel φ, $J_\varphi(g, A)$.* — Sind endlich zwei Gerade g_1, g_2 im Raume gegeben, so bestimmen sie mit jedem Punkte P ausserhalb zwei Ebenen (g_1P) und (g_2P); den geometrischen Ort derjenigen Punkte P, für welche sich diese Ebenen jedesmal unter dem gleichen Winkel φ schneiden, nennen wir die *Isogonalfläche der beiden Geraden g_1, g_2 für den Winkel φ* $(J_\varphi(g_1g_2))$, und falls insbesondere g_1, g_2 sich schneiden, auch den *Isogonalkegel der beiden Geraden für den Winkel φ.*

Die so definirten Flächen sollen auf den nachfolgenden Seiten sowohl synthetisch, wie analytisch behandelt werden*). Für den Winkel φ darf dabei ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit die Voraussetzung gemacht werden, dass $\varphi \leqq \frac{\pi}{2}$; denn, wenn die beiden Elemente (zwei Gerade, — Gerade und Ebene, — zwei Ebenen) sich unter dem Winkel φ schneiden, so schneiden sie sich ja auch unter dem Winkel $\pi - \varphi$.

§ 1.

Isogonalfläche zweier Punkte.

Da eine Isogonalfläche zweier Punkte P_1P_2 von jeder Ebene, die durch P_1P_2 geht, in der zu demselben Winkel φ gehörigen Isogonalcurve geschnitten werden muss, so entsteht dieselbe einfach durch Rotation des durch die Punkte P_1, P_2 und den Winkel φ bestimmten Kreises um die Sehne P_1P_2. Aus dem in der Einleitung Gesagten folgt ohne Weiteres, welcher Theil dieser Rotationsfläche in dem dort definirten Sinn dem Winkel φ selbst, welcher dem Nebenwinkel $\pi - \varphi$ entspricht. Die Trennung dieser beiden Theile

*) Ueber Modelle und Apparate zur Herstellung von Modellen, die für die Isogonalflächen angefertigt worden sind, wird an anderer Stelle berichtet werden.

geschieht hier durch die Kugel mit dem Durchmesser P_1P_2, welche die Isogonalfläche von P_1 und P_2 für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, — man könnte sie ***Orthogonalfläche*** nennen, — darstellt.

In Bezug auf die Sehne P_1P_2 der Isogonalfläche für irgend einen Winkel φ und die Tangenten in P_1 oder P_2 existirt offenbar ein räumliches Analogon zum Sehnen-Tangentensatz der Planimetrie.

Um die Gleichung der Fläche aufzustellen, seien

$$x = \pm p, \quad y = 0, \quad z = 0$$

bezw. die Coordinaten von P_1 und P_2, φ der Winkel der isogonalen Zuordnung. Stellt man dann die Gleichung des Kreises in der Ebene

$$y - \lambda z = 0$$

auf, der durch die beiden Punkte P_1P_2 und den Winkel φ bestimmt ist, und eliminirt λ aus diesen beiden Gleichungen, so ergiebt sich

$$\text{(A.)} \qquad (x^2+y^2+z^2-p^2)^2 = \frac{4p^2}{\mathrm{tg}^2\varphi}(y^2+z^2)$$

als Gleichung der $J_\varphi(P_1P_2)$, die vom vierten Grade ist. Wenn $\varphi = \frac{\pi}{2}$, geht die Gleichung in die der doppelt zählenden Kugel mit dem Durchmesser P_1P_2 über

$$\text{(A'.)} \qquad (x^2+y^2+z^2-p^2) = 0,$$

und, wenn $\varphi = 0$, erfordert (A.)

$$\text{(A''.)} \qquad y^2+z^2 = 0 \quad \text{oder} \quad (x^2+y^2+z^2-p^2)^2 = \infty;$$

d. h. die Fläche artet in die x-Axe und in die unendlich ferne Ebene aus.

§ 2.

Isogonalfläche eines Punktes und einer Geraden.

Synthetische Behandlung.

Sind eine Gerade g und ein Punkt A gegeben, so erhält man den geometrischen Ort der Punkte P, für welche der Winkel von (gP) und (AP) ein gegebener, $= \varphi$, ist, indem man jede Ebene des Ebenenbüschels g zum Schnitt bringt mit einem geraden Kreiskegel, dessen Spitze in A liegt, dessen Axe auf der betreffenden Ebene senkrecht steht und mit den Seitenlinien den Winkel $\frac{\pi}{2} - \varphi$ bildet. Man kann sich daher von der Isogonalfläche eines Punktes und einer Geraden auch in folgender Weise eine Vorstellung bilden (s. Fig. 1.,

bei der $\varphi = 60^0$ gewählt ist): Die Ebene der Zeichnung gehe durch A und stehe senkrecht auf g im Punkte G; in dieser Ebene seien die Kreise K_1, K_2 die Isogonalcurve der Punkte A und G für $\angle \varphi$. Jede Gerade durch G schneidet die Kreise K_1 und K_2 in zwei Punkten P_1 und P_2, die nur bei der Geraden GA in A zusammenfallen. Errichtet man über jeder der Strecken P_1P_2 als Durchmesser einen auf der Ebene der Zeichnung senkrecht stehenden Kreis, so bildet die Gesammtheit der so entstehenden Kreisperipherien die Isogonalfläche von A und g für $\angle \varphi$. Sie hat offenbar in A einen ***singulären Punkt*** und g als ***Doppelgerade,*** von der jedoch nur ein endliches Stück reell der Fläche angehört.

Wird $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so schrumpft die Fläche zu der Kreisperipherie K mit dem Durchmesser AG zusammen. Wird $\varphi = 0$, so artet die Fläche in die Ebene (Ag) aus.

Der ***Tangentialkegel,*** von A aus an die Fläche gelegt, besteht aus zwei Kreiskegeln, dessen einer als Axe eine Parallele durch A zu g, dessen zweiter als Axe eine Senkrechte zu g durch A in der Ebene der Zeichnung hat. Der Winkel der Seitenlinien mit der Axe ist beim ersteren φ, beim letzteren $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Die Berührungscurve des ersteren ist die von dem Kreiscylinder mit dem Grundkreis K aus der $J_\varphi(g, A)$ ausgeschnittene Curve. Der andere Kreiskegel berührt nur in A und schneidet noch eine analytisch zu bestimmende Curve aus der Fläche aus. Seine Seitenlinien sind die sämmtlichen Geraden durch A, welche die Ebene (gA) unter dem Winkel φ schneiden. In Bezug auf diese Tangenten an der Fläche in A und in Bezug auf die Ebene (gA) als „Sehne“ gilt also wiederum ein räumliches Analogon zum Sehnen-Tangentensatz der Planimetrie.

Eine Trennung der Fläche in zwei solche Theile, deren einer dem Winkel φ, deren anderer dem Winkel $\pi - \varphi$ entspricht, ist auch hier in gewissem Sinne möglich. Bezeichnet man nämlich den Schnitt von g mit der Projection von (AP) auf (Pg) durch S, so ist der Winkel APS entweder $= \varphi$, oder $= \pi - \varphi$. Diejenigen Punkte P, bei denen das Erstere eintritt, spielen daher eine ähnliche Rolle wie die der beiden grösseren Kreisbogenstücke bei der Isogonalcurve in der Ebene und umgekehrt. Die Trennung der Fläche $J_\varphi(A, g)$ in die beiden Theile erfolgt durch diejenigen Punkte P, bei denen die Projection von (PA) auf (Pg) parallel g ist, d. h. durch die Curve, die aus der Fläche von dem Cylinder mit dem Grundkreis K ausgeschnitten wird.

Analytische Behandlung.

Die Gerade g sei z-Axe ($x = 0$, $y = 0$); der Punkt A habe die Coordinaten $x = p$, $y = 0$, $z = 0$. Eine Ebene durch g ist also

$$(1.)\qquad x - \lambda y = 0,$$

eine Gerade durch A

$$(2.)\qquad x - p = \mu z, \quad y = \nu z.$$

Jenen Ebenen sollen nun diejenigen dieser Geraden zugeordnet werden, die mit ihnen den Winkel φ bilden. Also muss zwischen λ, μ, ν die Gleichung bestehen

$$\frac{\mu - \lambda\nu}{\sqrt{1+\lambda^2}\sqrt{1+\mu^2+\nu^2}} = \sin\varphi$$

oder

$$(3.)\qquad \frac{(\mu-\lambda\nu)^2}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2+\nu^2)} = \sin^2\varphi.$$

Substituirt man hierin die aus (1.) und (2.) sich ergebenden Werthe von λ, μ, ν, so folgt als Gleichung der Isogonalfläche von A und g für $\angle\varphi$:

$$(B.)\qquad \frac{p^2y^2}{(x^2+y^2)((x-p)^2+y^2+z^2)} = \sin^2\varphi.$$

Für $x = 0$, $y = 0$ und für $x = p$, $y = 0$, $z = 0$ und nur für diese beiden Werthsysteme verschwinden links sowohl Zähler wie Nenner. Daher ist noch zu prüfen, ob dieser Punkt (A) und jene Gerade (g) thatsächlich der Fläche angehören, bezw. inwieweit. Hierzu setzen wir nach (1.) wieder

$$y = \frac{x}{\lambda},$$

sodass aus (B.) wird

$$(4.)\qquad \frac{p^2}{(1+\lambda^2)\left((x-p)^2+\frac{x^2}{\lambda^2}+z^2\right)} = \sin^2\varphi.$$

Setzt man nun $x = 0$, so folgt

$$\frac{p^2}{(1+\lambda^2)(p^2+z^2)} = \sin^2\varphi,$$

und hieraus

$$\lambda^2 = \frac{p^2-(z^2+p^2)\sin^2\varphi}{(z^2+p^2)\sin^2\varphi}.$$

λ wird also dann und nur dann reell, wenn

$$(5.)\qquad z^2 \leqq p^2\operatorname{cotg}^2\varphi.$$

Nur dieses Stück der z-Axe oder von g gehört also reell der Fläche (B.) an.

Um das Werthsystem $x=p,\ y=0,\ z=0$ zu prüfen, setzen wir nach (2.)

$$x-p=\mu z, \quad y=\nu z$$

und erhalten so

$$\frac{p^2\nu^2}{((\mu z+p)^2+\nu^2 z^2)(\mu^2+\nu^2+1)} = \sin^2\varphi,$$

woraus für $z=0$ folgt:

$$\frac{\nu^2}{\mu^2+\nu^2+1} = \sin^2\varphi.$$

Da rechts eine positive Zahl steht, die $\leqq 1$ ist, so ist diese Gleichung stets durch reelle μ, ν zu erfüllen; d. h. Punkt A gehört thatsächlich der Fläche (B.) an.

Entfernt man in Gleichung (B.) den Nenner, so stellt die Gleichung vierten Grades

$$\text{(B'.)} \qquad (x^2+y^2)((x-p)^2+y^2+z^2)\sin^2\varphi-p^2y^2 = 0$$

dieselbe Fläche wie (B.) dar, der aber jetzt die ganze unendliche Gerade g doppelt angehört. Um also gerade die durch die geometrische Definition bestimmte Fläche analytisch dargestellt zu haben, muss man Gleichung (B.) beibehalten.

Ist insbesondere $\varphi=\frac{\pi}{2}$, so kann (B'.) in die Gestalt

$$\text{(B''.)} \qquad (x^2+y^2-xp)^2+z^2(x^2+y^2) = 0$$

gebracht werden und ist daher nur durch

$$x=0, \quad y=0$$

oder durch

$$z=0, \quad x^2+y^2-xp = 0$$

zu erfüllen. Ist dagegen $\varphi=0$, so ist (B'.) nur durch $y=0$ zu befriedigen. Beides stimmt mit den synthetisch gewonnenen Ergebnissen überein.

Um den *Tangentialkegel* der Fläche (B'.) vom Punkt A ($x=p,\ y=0,\ z=0$) aus zu erhalten, bezeichnen wir die linke Seite der Gleichung (B'.) mit $F(x,y,z)$, ihre partiellen Ableitungen nach x, y, z bezw. mit $F_1(x,y,z)$, $F_2(x,y,z)$, $F_3(x,y,z)$ und finden dann die gesuchte Gleichung durch Elimi-

nation der Hülfsgrösse t aus den beiden Gleichungen

$$(6.)\qquad F(p+(x-p)t,\ yt,\ zt) = 0,$$

$$(7.)\qquad \begin{cases} (x-p)F_1(p+(x-p)t,\ yt,\ zt) \\ \quad +yF_2(p+(x-p)t,\ yt,\ zt) \\ \quad +zF_3(p+(x-p)t,\ yt,\ zt) = 0. \end{cases}$$

Entwickelt man aber die linken Seiten dieser Gleichungen nach t, so lauten sie:

$$(6'.)\qquad At^4+\ Bt^3+\ Ct^2 = 0,$$

$$(7'.)\qquad 4At^3+3Bt^2+2Ct = 0,$$

wenn

$$(8.)\qquad \begin{cases} A \equiv [(x-p)^2+y^2][(x-p)^2+y^2+z^2]\sin^2\varphi, \\ B \equiv 2(x-p)p[(x-p)^2+y^2+z^2]\sin^2\varphi, \\ C \equiv p^2[(x-p)^2+y^2+z^2]\sin^2\varphi-p^2y^2. \end{cases}$$

So findet man als Gleichung des Tangentialkegels:

$$(9.)\qquad C^2(B^2-4AC) = 0,$$

$C=0$ liefert nach leichten Umformungen

$$(10.)\qquad (x-p)^2+z^2 = y^2\operatorname{cotg}^2\varphi,$$

d. h. einen Kreiskegel mit der Spitze A, dessen Axe parallel der y-Axe und dessen Seitenlinien mit dieser Axe den Winkel $\frac{\pi}{2}-\varphi$ bilden. Um die Schnittlinie dieses Kegels mit der Isogonalfläche zu finden, combiniren wir die Gleichungen (B'.) und (10.) und erhalten

$$(11.)\qquad (x^2+y^2)y^2 = p^2y^2;$$

d. h. der Kegel und die $J_\varphi(A, g)$ haben diejenige Curve gemein, welche aus der Isogonalfläche von dem Cylinder

$$(12.)\qquad x^2+y^2 = p^2,$$

dessen Grundkreis in der Figur 1 mit C bezeichnet ist, ausgeschnitten wird.

Setzt man den anderen Factor auf der linken Seite von (9.) gleich Null, so ergiebt sich nach Weglassung constanter Factoren

$$(13.)\qquad y^2[(x-p)^2+y^2+z^2][(x-p)^2+y^2-z^2\operatorname{tg}^2\varphi] = 0.$$

Ausser der xz-Ebene ($y=0$), die ja in der That einen Theil des Tangentialkegels von A an die Fläche (B'.) ausmacht, und dem Punkte A erhalten

wir also hier den Kreiskegel

$$(14.)\qquad (x-p)^2+y^2 = z^2\operatorname{tg}^2\varphi$$

mit der Spitze A, dessen Axe parallel der z-Axe und mit den Seitenlinien den Winkel φ bildet. Verbindet man (14.) mit (B'.), so ergiebt sich

$$(15.)\qquad (x^2+y^2-px)^2 = 0,$$

d. h. jener Kegel berührt die Isogonalfläche in den Punkten der Curve, die aus der Fläche von dem Cylinder mit dem Grundkreise K ausgeschnitten wird.

§ 3.

Isogonalfläche zweier Geraden.

Synthetische Behandlung.

g_1 und g_2 seien zwei beliebige Gerade im Raume, α ihr Winkel $\left(\leqq \frac{\pi}{2}\right)$, $2p$ ihr kürzester Abstand, O dessen Mitte, A_1 auf g_1 und A_2 auf g_2 die Endpunkte des gemeinsamen Lothes $2p$. Die Isogonalfläche der zwei Geraden g_1, g_2 für den Winkel φ kann auch als das Erzeugniss der zwei Ebenenbüschel g_1, g_2 definirt werden, wenn diese in solche Beziehung gesetzt werden, dass jeder Ebene des einen diejenigen Ebenen des andern entsprechen, welche mit jener den Winkel φ bilden. Betrachtet man nun eine beliebige Ebene ε_1 durch g_1, so bilden sämmtliche Gerade durch A_2, die ε_1 unter dem Winkel φ schneiden, einen Kreiskegel mit der Spitze A_2, und sämmtliche Ebenen durch A_2, die ε_1 unter demselben Winkel φ schneiden, sind daher die Tangentialebenen jenes Kegels. Unter den Ebenen des Büschels g_2 entsprechen also diejenigen der Ebene ε_1, welche zugleich Tangentialebenen an jenem Kegel sind, d. h. zwei, eine oder gar keine Ebene, je nachdem g_2 ausserhalb, auf oder innerhalb der Kegelfläche liegt. Da nun der Grundkreis dieser Kegelfläche in der Ebene ε_1 offenbar der Schnitt von ε_1 mit der $J_\varphi(g_1, A_2)$ ist (s. § 2), so sind die Schnittlinien der Ebene ε_1 mit ihren entsprechenden Ebenen im Büschel g_2, die (0, 1 oder 2) Tangenten, die von dem Schnittpunkte der Ebene ε_1 mit der Geraden g_2 an den Kreis zu legen sind, welchen ε_1 aus der $J_\varphi(g_1 A_2)$ ausschneidet.

Denkt man diese Tangenten nun in jeder Ebene des Büschels g_1 construirt, so erhält man offenbar *alle Erzeugenden der Isogonalfläche von* g_1 *und* g_2. Andererseits hätte man ebenso gut die $J_\varphi(g_2 A_1)$ benutzen können; also hätte man dabei *dieselbe* Schaar von Geraden erhalten. Somit können wir das Ergebniss der bisherigen Betrachtung dahin zusammenfassen:

Die Isogonalfläche der zwei Geraden g_1, g_2 für $\angle\varphi$ besteht aus sämmtlichen Tangentenpaaren, die von g_2 an die aus $J_\varphi(g_1 A_2)$ von dem Ebenenbüschel g_1 — oder w. d. i., die von g_1 an die aus $J_\varphi(g_2 A_1)$ von dem Ebenenbüschel g_2 — ausgeschnittenen Kreise gelegt werden können.

Da jeder Ebene des Büschels g_1 im allgemeinen und höchstens zwei Ebenen des Büschels g_2 entsprechen und umgekehrt, ist die Fläche *eine Regelfläche vierter Ordnung.* Auf den beiden Geraden g_1 und g_2 entstehen natürlich gleichzeitig zwei in entsprechender Weise auf einander bezogene Punktreihen, sodass die $J_\varphi(g_1 g_2)$ auch als Erzeugniss der Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte dieser Punktreihen angesehen werden kann.

Um von den *verschiedenen möglichen Formen der Fläche* ein Bild zu gewinnen*), halten wir die Vorstellung fest, dass zur Construction der Fläche die $J_\varphi(g_1 A_2)$ benutzt wird. Die Gestalt der Fläche ist wesentlich verschiedener Art, je nachdem

$$\alpha \lesseqgtr \varphi.$$

1) $\alpha < \varphi$. Die Gerade g_2 hat dann mit der $J_\varphi(g_1 A_2)$ nur Punkt A_2 gemein, ohne dort Tangente zu sein. Daher kann man von jedem Punkte von g_2 zwei Tangenten an den betreffenden Kreis legen. Davon, dass dies auch von Punkt A_2 gilt, wo der Kreis unendlich klein geworden ist, überzeugt man sich am besten, indem man umgekehrt Punkt A_1 betrachtet, der ja die gleiche Rolle spielt, und von ihm aus die Tangenten an alle Kreise legt, welche von dem Ebenenbüschel g_1 aus der $J_\varphi(g_1 A_2)$ ausgeschnitten werden. Man sieht dann, dass zwei verschiedene dieser Tangenten die g_2 schneiden müssen. Jeder Ebene des einen Büschels, bezw. jedem Punkte der einen Punktreihe entsprechen also in diesem Falle zwei verschiedene Ebenen, bezw. Punkte in dem anderen Gebilde.

Gehen wir nun von dem unendlich fernen Punkte auf g_2 aus und betrachten zunächst nur die eine der beiden Erzeugenden, die durch diesen Punkt gehen, d. h. die eine der beiden Tangenten an $J_\varphi(g_1 A_2)$, welche g_1 schneiden und zu g_2 parallel sind. Lassen wir dann einen Punkt die ganze Gerade g_2 einmal durchwandern, indem wir immer nur diejenige der beiden Erzeugenden construiren, welche sich an die im vorhergehenden Punkte gezogene stetig anschliesst, so kehren wir mit der Erzeugenden schliesslich in die Anfangs-

*) Vergl. hierzu *Rohn*, die verschiedenen Arten der Regelflächen IV. Ordnung. Math. Ann. 28. (1887) S. 284 ff.

lage zurück. Wir haben also auf diese Weise eine in sich abgeschlossene Schaar von Erzeugenden oder einen Mantel der Fläche erhalten und finden einen ebenso gestalteten zweiten, wenn wir nun von der anderen Erzeugenden, welche parallel g_2 ist, ausgehen. *Die Fläche besteht also in diesem Falle**) *aus zwei in sich geschlossenen Mänteln, welche sich gegenseitig in den Geraden* g_1, g_2 *durchsetzen. Diese Geraden gehören in ihrer ganzen Ausdehnung reell als Doppelgeraden der Fläche an. Die beiden Ebenenbüschel, bezw. Punktreihen* g_1, g_2 *haben keine ausgezeichneten Elemente (bei den Punktreihen „pinch-points" genannt)***), *denen im anderen Gebilde nur ein Element entspricht.*

Ist insbesondere $\varphi = \frac{\pi}{2}$, schrumpft also die $J_\varphi(g_1 A_2)$ auf eine Kreisperipherie zusammen, so fällt jedes der Paare von Erzeugenden der $J_\varphi(g_1 g_2)$ in eine einzige Erzeugende, die beiden Schaaren in eine einzige Schaar, nämlich in die eine Schaar der Erzeugenden eines *orthogonalen Hyperboloids****) zusammen. Die naheliegende Frage, welche Bedeutung die andere Regelschaar des Hyperboloids hat, beantwortet sich leicht dahin, dass sie den Grenzfall der Isogonalfläche $J_\varphi(g_1' g_2')$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ darstellt, wenn g_1', g_2' bezw. die Parallelen durch A_1 und A_2 zu g_2 und g_1 sind.

Ist $\alpha = 0$, d. h. sind g_1 und g_2 parallel, so geht die Fläche $J_\varphi(g_1 g_2)$ in das System der zwei Kreiscylinder über, die sich in g_1 und g_2 schneiden und, senkrecht zu diesen Geraden geschnitten, die ebene Isogonalcurve für $\angle\,\varphi$ ergeben.

2) $\alpha > \varphi$. Die Gerade g_2 schneidet in diesem Fall die $J_\varphi(g_1 A_2)$ in A_2 und zwei anderen Punkten, D_{21}, D_{22}, die gleich weit nach beiden Seiten von A_2 entfernt liegen. Dann kann man offenbar von allen Punkten auf g_2 zwischen D_{21} und D_{22} gar keine Tangente an die Kreise legen, die der Ebenenbüschel g_1 aus der $J_\varphi(g_1 A_2)$ ausschneidet, von D_{21} und D_{22} je eine solche, von allen andern Punkten wieder je zwei. Bezeichnen wir mit D_{11}, D_{12} die entsprechenden Punkte auf g_1, so gehören also jetzt von g_1 und g_2 nur die unendlich grossen Strecken $D_{11} D_{12}$ und $D_{21} D_{22}$ der Fläche reell an und zwar als Doppelgeraden.

---

*) Vgl. *Rohn,* a. a. O. S. 292. 10. Zweites Modell der zugehörigen Modellserie.

**) Vgl. *Rohn,* a. a. O. S. 291.

***) Vgl. hierüber z. B. *Schröter,* Theorie der Oberflächen II. Ordnung u. s. w. (1880) § 25 und insbes. die S. 184 angegebene Litteratur.

Verfolgt man wieder die einzelnen Erzeugenden, indem man zuerst den unendlich fernen Punkt auf g_2 und die eine der beiden zugehörigen Erzeugenden betrachtet, dann einen Punkt auf g_2 vom Unendlichen bis D_{21} gleiten lässt und von D_{21} ins Unendliche zurück, so beschreibt die Erzeugende einen Theil der Fläche, kehrt aber nicht in die Anfangslage zurück, sondern nimmt schliesslich die zu dieser parallele Stellung an. Wandert der Punkt auf g_2 dann weiter vom Unendlichen nach D_{22} und zurück, so gelangt die Erzeugende erst in ihre Ausgangslage. *Die Fläche besteht daher jetzt aus einem einzigen Mantel, der sich längs g_1 und g_2 selbst durchsetzt.*

Von diesen beiden Doppelgeraden g_1 und g_2 gehören aber die endlichen Strecken $D_{11}D_{12}$ und $D_{21}D_{22}$ der Fläche nicht reell an. Die beiden Punktreihen g_1 g_2 haben in D_{11}, D_{12} und D_{21}, D_{22} pinch-points. (Entsprechend bei den Ebenenbüscheln)).*

Ist $\varphi = 0$, so rücken die vier Punkte D ins Unendliche. Die Fläche reducirt sich auf die unendlich ferne Gerade, welche die unendlich fernen Punkte von g_1 und g_2 verbindet. Dann sind ja in der That die Ebenen durch g_1 parallel zu g_2 und durch g_2 parallel zu g_1 die einzigen aus den beiden Ebenenbüscheln g_1, g_2, welche den Winkel $\varphi = 0$ bilden.

Ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so entspricht den Punkten D_{11}, D_{12} auf g_1 der unendlich ferne Punkt auf g_2 und den Punkten D_{21}, D_{22} auf g_2 der unendlich ferne Punkt auf g_1. Während also der Schnittpunkt der wandernden Erzeugenden mit g_1 das Stück von ∞ bis D_{11} durchläuft, durchläuft *gleichzeitig* der Schnittpunkt mit g_2 das Stück von D_{21} bis ∞ (oder von D_{22} bis ∞), u. s. w.

3) $\alpha = \varphi$, *der Grenzfall zwischen* 1) *und* 2).

g_2 trifft in diesem Falle die Fläche $J_\varphi(g_1 A_2)$ wieder nur in A_2, ist aber hier Tangente an der Fläche. Von jedem Punkt von g_2 sind zwei Tangenten an den Kreis zu legen, den die betreffende Ebene des Büschels g_1 aus der $J_\varphi(g_1 A_2)$ ausschneidet; von A_2 jedoch nur *eine;* diese ist die Verbindungslinie mit A_1 und ist *Doppel-Erzeugende.* Denn der Ebene $(g_1 A_2)$ von g_1 entspricht nur die eine Ebene $(g_2 A_1)$ von g_2 und umgekehrt.

Lässt man wieder eine Erzeugende die ganze Fläche $J_\varphi(g_1 g_2)$ beschreiben, so zeigt sich *dass diese aus einem einzigen Mantel besteht, der sich aber ausser in den Doppelgeraden g_1, g_2 noch in der Doppel-Erzeugenden $A_1 A_2$ selbst durchsetzt* — oder wie man dafür auch sagen kann — *die*

*) Vgl. *Rohn,* a. a. O. S. 292. 11.)

Fläche besteht aus zwei Mänteln, die in der Doppel-Erzeugenden zusammenstossen, — jenachdem man die Fläche als Grenzfall von 2) oder von 1) betrachten will. ***Die Doppelgeraden g_1, g_2 gehören also wieder in ihrer ganzen Ausdehnung reell der Fläche an; die Ebenenbüschel, bezw. Punktreihen g_1, g_2 haben nur je ein ausgezeichnetes Element****).

Ist insbesondere $\alpha = \varphi = 0$, so degenerirt die Fläche in die Ebene $(g_1 g_2)$. Ist $\alpha = \varphi = \frac{\pi}{2}$, so besteht die Fläche aus den zwei Ebenen $(g_1 A_2)$ und $(g_2 A_1)$.

Construirt man nun bei der Isogonalfläche $J_\varphi(g_1 g_2)$ für einen beliebigen Winkel $\varphi\left(< \frac{\pi}{2}\right)$ gleichzeitig wieder die ***Orthogonalfläche,*** d. h. das orthogonale Hyperboloid, so kann dieses ausser den Geraden g_1, g_2 keinen Punkt mit jener Fläche gemein haben. Betrachtet man dann von beiden Flächen nur den durch g_1 und g_2 „endlich" begrenzten Theil, d. h. von jeder Erzeugenden der $J_\varphi(g_1 g_2)$ und des $J_{\frac{\pi}{2}}(g_1 g_2)$ nur das endliche Stück zwischen den Schnittpunkten mit g_1 und g_2 — bei den Erzeugenden, die zu g_1 oder g_2 parallel sind, ergiebt die Stetigkeit, welches der beiden unendlich langen Stücke zu wählen ist, — so muss dieses Flächenstück bei der $J_\varphi(g_1 g_2)$ aus zwei Theilen bestehen, deren einer ausserhalb, deren anderer innerhalb des Hyperboloids verläuft. Denn, wenn man von irgend einem Punkte von g_2 die beiden Erzeugenden der $J_\varphi(g_1 g_2)$ und die Erzeugende des Hyperboloids construirt, so theilt die letztere den Winkel der beiden ersteren. Diese beiden Theile der Isogonalfläche entsprechen nun wieder in gewissem Sinne bezw. dem Winkel φ selbst und seinem Supplement. Errichtet man nämlich auf einer Erzeugenden g der $J_\varphi(g_1 g_2)$ in einem Punkte P zwischen g_1 und g_2 die Lothe in den Ebenen $(g g_1)$ und $(g g_2)$, welche die Geraden g_1 und g_2 in S_1 und S_2 schneiden mögen, so ist Winkel $S_1 P S_2 = \varphi$ oder $\pi - \varphi$, je nachdem die Erzeugende g dem einen oder anderen Theil von $J_\varphi(g_1 g_2)$ angehört. Die Trennung der $J_\varphi(g_1 g_2)$ durch das Hyperboloid in diese zwei Theile, besteht natürlich nicht nur für jenes endlich begrenzte Stück, sondern für die Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung. Ist aber P ein Punkt auf g ausserhalb der durch die Schnitte mit g_1 und g_2 bestimmten Strecke, so ist der Winkel $S_1 P S_2$ das Supplement des Winkels, den man bei einem Punkt innerhalb jener Strecke erhält.

---

*) Vgl. *Rohn*, a. a. O. S. 293. 13.)

Analytische Behandlung.

Die Gleichungen von g_1 und g_2 seien bezw.

$$(16.)\qquad x-p = 0,\quad y-az = 0,$$

$$(17.)\qquad x+p = 0,\quad y+az = 0,$$

wo also $a = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ und O der Coordinatenanfangspunkt ist. Damit die Ebenenbüschel

$$(18.)\qquad x-p+\lambda(y-az) = 0,$$

$$(19.)\qquad x+p+\mu(y+az) = 0$$

isogonal auf einander bezogen werden für den Winkel φ, müssen λ und μ durch die Relation verbunden sein

$$\frac{1+\lambda\mu-a^2\lambda\mu}{\sqrt{1+(1+a^2)\lambda^2}\sqrt{1+(1+a^2)\mu^2}} = \cos\varphi,$$

oder, wenn quadrirt und zur Abkürzung

$$(20.)\qquad \cos\varphi \equiv C$$

gesetzt wird,

$$(21.)\qquad \frac{[1+(1-a^2)\lambda\mu]^2}{[1+(1+a^2)\lambda^2][1+(1+a^2)\mu^2]} = C^2.$$

Entfernt man bei dieser Relation den Nenner und bringt alles auf eine Seite, so hat man eine sowohl in λ wie in μ quadratische Function, die — wie die Aufstellung und Untersuchung der Determinante dieser Function als Function der drei Variablen λ, μ, $\lambda\mu$ zeigt — dann und nur dann in zwei bilineare Factoren zerfällt, wenn entweder $C = 0$ oder $a = 0$ ist. *Nur in den Fällen* $\varphi = \frac{\pi}{2}$ *und* $\alpha = 0$ *also ist die Beziehuug zwischen den Ebenenbüscheln* g_1 *und* g_2 *projectivisch.*

Die Beziehung (21.) zwischen λ und μ ist ferner symmetrisch. Jedem Elemente des einen Werthgebietes, λ oder μ, entsprechen im allgemeinen zwei reelle oder imaginäre Elemente des anderen. Diejenigen Elemente, denen nur ein Element im anderen Gebiet entspricht, sind ausgezeichnete. Man braucht dieselben nur für das eine Gebiet aufzusuchen, da sie alsdann wegen jener Symmetrie auch für das andere bekannt sind. Die Durchführung dieser Rechnung*) ergiebt:

*) Vgl. hierzu *Rohn*, a. a. O. S. 288.

Je nachdem

$$C \lesseqgtr \frac{1-a^2}{1+a^2},$$

d. h.

$$\cos\varphi \lesseqgtr \cos\alpha,$$

d. h.

$$\varphi \gtreqless \alpha,$$

existiren in jedem der beiden Gebiete vier imaginäre — oder zwei zusammenfallende reelle und zwei imaginäre — oder zwei verschiedene reelle und zwei imaginäre ausgezeichnete Elemente. Dies stimmt mit den Ergebnissen der synthetischen Behandlung überein.

Die Gleichung der Isogonalfläche $J_\varphi(g_1 g_2)$ selbst findet man nun, indem man in (21.) für λ und μ die sich aus (18.) und (19.) ergebenden Werthe einsetzt,

$$\text{(C.)}\qquad \frac{[(y-az)(y+az)+(1-a^2)(x^2-p^2)]^2}{[(y-az)^2+(1+a^2)(x-p)^2][(y+az)^2+(1+a^2)(x+p)^2]} = C^2,$$

oder, wenn man den Nenner entfernt, wodurch man eventuell erst bewirkt, dass der Fläche die Geraden g_1, g_2 in ihrer ganzen Ausdehnung als Doppelgeraden reell angehören,

$$\text{(C'.)}\qquad \begin{cases} [(y-az)(y+az)+(1-a^2)(x^2-p^2)]^2 \\ -C^2[(y-az)^2+(1+a^2)(x-p)^2][(y+az)^2+(1+a^2)(x+p)^2] = 0. \end{cases}$$

Diese Fläche vierter Ordnung reducirt sich für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, d. h. $C=0$, auf das doppelt zählende *orthogonale Hyperboloid*

$$\text{(22.)}\qquad (y-az)(y+az)+(1-a^2)(x^2-p^2) = 0,$$

für $\alpha = 0$, d. h. $a = 0$ auf

$$\text{(23.)}\qquad [y^2+x^2-p^2]^2 - C^2[y^2+(x-p)^2][y^2+(x+p)^2] = 0,$$

d. h. auf das System der beiden *Kreiscylinder,* die von der xy-Ebene in der Isogonalcurve von A_1, A_2 für $\angle\,\varphi$ geschnitten werden.

Verbindet man die Gleichungen von g_1 und g_2 mit (C.), so verschwindet auf der linken Seite der letzteren wieder sowohl Zähler wie Nenner. Um daher zu prüfen, ob, bezw. inwieweit z. B. die Gerade g_1 der Fläche reell angehört, setzen wir in (C.)

$$y-az = -\frac{1}{\lambda}(x-p),$$

worauf der Factor $x-p$ fortfällt, und dann erst $y = az$, $x = p$. Es resultirt eine Gleichung zwischen λ und z, die für λ dann und nur dann reelle Werthe liefert, wenn

$$(24.)\qquad z^2 \gtreqless p^2 \frac{\cos^2\varphi - \cos^2\alpha}{\sin^2\varphi . \sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Ist die Grösse rechts < 0, d. h. $\varphi > \alpha$, so erhält also λ für jeden Werth von z reelle verschiedene Werthe. Ist $\varphi = \alpha$, so gilt das Gleiche; nur für $z = 0$ fallen beide Werthe von λ zusammen: $z = 0$ ist dann ein ausgezeichneter Punkt auf g_1 und g_2. Ist endlich $\varphi < \alpha$, so giebt (24.) eine wirkliche Bedingung für z, damit λ reell wird, wobei die Grenzwerthe von z

$$z = \pm \frac{p}{\sin\varphi \sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2\alpha}$$

wieder zwei ausgezeichnete Punkte auf jeder der Geraden g_1, g_2 liefern.

In dem Falle $\alpha = \varphi$ fanden wir auf synthetischem Wege, dass die Gerade A_1A_2 Doppelerzeugende sei. In der That sieht man, dass Gleichung (C.), wenn

$$C = \frac{1-a^2}{1+a^2}$$

ist, durch die Gleichungen der x-Axe, $y = 0$, $z = 0$, doppelt befriedigt wird.

Jeder ebene Schnitt durch die Fläche (C'.) liefert eine Curve vierter Ordnung, deren Gleichung insbesondere in der xy-Ebene ($z = 0$) lautet:

$$(25.)\quad [y^2+(1-a^2)(x^2-p^2)]^2 - C^2[y^2+(1+a^2)(x-p)^2][y^2+(1+a^2)(x+p)^2] = 0.$$

Man kann daher die Isogonalfläche $J_\varphi(g_1g_2)$ auch dadurch erzeugen, dass eine Gerade beständig an dieser Curve und an den beiden Geraden g_1, g_2 entlang gleitet. Dies gestaltet sich besonders einfach für den Fall $\alpha = \varphi$, da alsdann die Gleichung (25.) nach leichten Umformungen in

$$(26.)\qquad y^2\left[\frac{y^2}{\frac{p^2}{a^2}(1-a^4)} + \frac{x^2}{\frac{p^2}{a^2}} - 1\right] = 0$$

übergeht. Die Curve vierter Ordnung zerfällt also in die x-Axe als Doppelgerade und in eine *Ellipse*, auf deren grosser Axe (der x-Axe) die beiden Punkte A_1, A_2 liegen (jedoch nicht in den Scheiteln). Da die x-Axe Doppelerzeugende der $J_\varphi(g_1g_2)$ für $\alpha = \varphi$ ist, muss überhaupt jeder durch dieselbe gelegte ebene Schnitt ausser ihr in einem *Kegelschnitt* bestehen. Dieser ist

eine **Ellipse,** wenn die Schnittebene, wie die xy-Ebene, den stumpfen Winkel von g_1 und g_2 theilt, eine **Hyperbel,** wenn sie den mit α bezeichneten spitzen Winkel theilt, in den beiden Grenzlagen, wo die Ebene durch g_1 bezw. g_2 geht, eben diese **Doppelgerade.** Ist aber $\alpha = \varphi = \frac{\pi}{2}$, wobei die Fläche aus den beiden Doppelebenen

$$y = \pm z$$

besteht, so degenerirt jener Schnitt in die x-Axe allein als vierfach zählende Schnittlinie der beiden Doppelebenen.

Die Gleichungen der beiden Geraden g'_1, g'_2, welche bezw. durch A_1 und A_2 gehen und zu g_2, g_1 parallel sind, erhält man aus (16.) und (17.) durch Vertauschung von p mit $-p$. Ebenso erhält man daher aus (C.) die Gleichung der $J_\varphi(g'_1 g'_2)$. Da aber der Zähler der linken Seite von (C.) in $+p$ und $-p$ symmetrisch ist, gehen für $C=0$ beide Isogonalflächen in *dasselbe* Hyperboloid über, d. h.

$$J_{\frac{\pi}{2}}(g_1 g_2) \equiv J_{\frac{\pi}{2}}(g'_1 g'_2).$$

§ 4.

Isogonalkegel.

Legt man bei der $J_\varphi(g_1 g_2)$ durch den Mittelpunkt O des kürzesten Abstandes $A_1 A_2$ der zwei Geraden $g_1 g_2$, — den man als **Mittelpunkt** der Fläche bezeichnen kann, — Parallele zu allen Erzeugenden, so erhält man einen Kegel vierter Ordnung, den **Asymptotenkegel der** $J_\varphi(g_1 g_2)$. Da g'_1, g'_2 bezw. parallel zu g_2, g_1 sind, **besitzen die beiden Flächen**

$$J_\varphi(g_1 g_2) \quad \text{und} \quad J_\varphi(g'_1 g'_2)$$

denselben Asymptotenkegel.

Der Asymptotenkegel von $J_\varphi(g_1 g_2)$ ist aber zugleich die Isogonalfläche der zwei Geraden, welche durch O gehen und bezw. zu g_1 und g_2 parallel sind. Wir wollen diese mit h_1, h_2 bezeichnen und ihre Isogonalfläche

$$J_\varphi(h_1 h_2)$$

auch ihren **Isogonalkegel für Winkel** φ nennen. Derselbe besteht nach der Erörterung über die drei Fälle der $J_\varphi(g_1 g_2)$ im vorigen Paragraphen aus einem oder aus zwei Mänteln, je nachdem $\varphi \lesseqgtr \alpha$, während bei $\varphi = \alpha$ die beiden Mäntel in der Geraden zusammenstossen, die auf h_1 und h_2 in deren

Schnittpunkt O senkrecht steht. Für den Isogonalkegel gilt abermals ein räumliches Analogon zum Sehnen-Tangentensatz, wenn man als „Sehne“ die Ebene $(h_1 h_2)$ nimmt.

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ geht der Isogonalkegel in den *orthogonalen Kegel**) der Geraden h_1, h_2 über. Mit Hülfe des letzteren können wir den $J_\varphi(h_1 h_2)$ wieder in zwei Theile theilen, deren einer dem Winkel φ selbst, deren anderer dem Supplemente entspricht. Wir wollen dazu den Winkel zweier Ebenen durch h_1 bezw. h_2 in der Weise *eindeutig* bestimmen, dass wir, wenn die Lothe in einem Punkte P der Durchschnittskante in den Ebenen (Ph_1) und (Ph_2) die Geraden h_1 und h_2 bezw. in S_1 und S_2 schneiden, speciell Winkel S_1PS_2 als den Winkel der zwei Ebenen (Ph_1) und (Ph_2) betrachten. Der orthogonale Kegel theilt dann den ganzen Raum in zwei Theile; ist nämlich P ein Punkt auf demselben, so ist der Winkel der Ebenen (Ph_1) und $(Ph_2) = \frac{\pi}{2}$; liegt P nicht auf dem Kegel, so ist dieser Winkel $\gtrless \frac{\pi}{2}$, je nachdem P im Innern oder im Aeussern des orthogonalen Kegels liegt, wobei als „Inneres“ des orthogonalen Kegels derjenige Raum bezeichnet wird, in welchem der Winkel $(h_1 h_2)$ spitz ist. Daher muss der Isogonalkegel $J_\varphi(h_1 h_2)$ für einen beliebigen Winkel φ $\left(< \frac{\pi}{2}\right)$ in zwei Theile

$$J'_\varphi(h_1 h_2) \quad \text{und} \quad J'_{\pi-\varphi}(h_1 h_2)$$

zerfallen, deren einer dem Winkel φ selbst, deren anderer dem Supplementwinkel $\pi - \varphi$ entspricht, und deren ersterer ganz ausserhalb, deren letzterer ganz innerhalb des orthogonalen Kegels liegt, während die Geraden h_1, h allen drei Kegeln

$$J_{\frac{\pi}{2}}(h_1 h_2), \quad J'_\varphi(h_1 h_2), \quad J'_{\pi-\varphi}(h_1 h_2)$$

gemeinsam sind.

Da nun $J'_\varphi(h_1 h_2)$ der Ort aller Punkte P ist, für die der Winkel von (Ph_1) und $(Ph_2) = \varphi$ ist, so muss auch dieser Kegel wie der orthogonale den Raum in zwei Theile theilen, die bezw. alle Punkte enthalten, für welche jener Winkel $\gtrless \varphi$ ist, und die wir in Uebereinstimmung mit der Festsetzung beim orthogonalen Kegel als *Inneres* und *Aeusseres* von $J'_\varphi(h_1 h_2)$ zu bezeichnen haben. Entsprechendes gilt für $J'_{\pi-\varphi}(h_1 h_2)$. — Diese Be-

*) Vgl: *Schröter*, Theorie d. Oberfl. II. Ordnung u. s. w. § 12. S. 67ff.

trachtungen sind für eine spätere Anwendung von Wichtigkeit und dienen zugleich dazu, die Vorstellung der Gestalt des Isogonalkegels zu erleichtern.

Um den Isogonalkegel zweier Geraden h_1, h_2 zu erhalten, kann man — statt wie hier von $J_\varphi(g_1 g_2)$ auszugehen — natürlich auch direct so verfahren, dass man die Isogonalfläche für h_1 und einen Punkt A_2 auf h_2 herstellt und dann von dem Schnittpunkte $(h_1 h_2)$ alle Tangenten an die Kreise construirt, welche der Ebenenbüschel h_1 aus der $J_\varphi(h_1 A_2)$ ausschneidet. Dabei gewinnt man abermals eine Vorstellung von den drei verschiedenen Formen des Isogonalkegels je nachdem $\alpha \lesseqgtr \varphi$.

Die *Gleichung* des Asymptotenkegels der $J_\varphi(g_1 g_2)$ oder des Isogonalkegels der Geraden h_1, h_2 ergiebt sich aus (C.), indem nur $p = 0$ gesetzt wird,

$$\text{(D.)}\qquad \frac{[(y-az)(y+az)+(1-a^2)x^2]^2}{[(y-az)^2+(1+a^2)x^2][(y+az)^2+(1+a^2)x^2]} = C^2.$$

Der Isogonalkegel ist also symmetrisch in Bezug auf jede der drei Axenebenen, da sich die Gleichung (D.) bei keiner der Vertauschungen $(+x, -x)$, $(+y, -y)$, $(+z, -z)$ ändert.

Um von den drei verschiedenen Formen des Isogonalkegels auf Grund der analytischen Darstellung eine anschauliche Vorstellung zu erhalten, schneiden wir den Kegel (D.) durch eine Ebene senkrecht zur z-Axe, etwa

$$z = \frac{1}{a},$$

und discutiren die ebene Schnittcurve vierter Ordnung

$$\text{(27.)}\quad [y^2-1+(1-a^2)x^2]^2-C^2[(y-1)^2+(1+a^2)x^2][(y+1)^2+(1+a^2)x^2] = 0$$

oder, nach Potenzen von x geordnet,

$$\text{(27}^{\text{a}}\text{.)}\quad \begin{cases} x^4[(1-a^2)^2-C^2(1+a^2)^2]-2x^2[C^2(1+a^2)(y^2+1)-(1-a^2)(y^2-1)] \\ \qquad\qquad +(1-C^2)(y^2-1)^2 = 0 \end{cases}$$

in jedem der drei Fälle für specielle Werthe von φ und α.

1) $\alpha < \varphi$.

$$\varphi = \frac{\pi}{3},\quad C = \frac{1}{2};\quad \alpha = 2\operatorname{arctang}\frac{1}{\sqrt{5}},\quad a = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Es folgt aus (27ᵃ.)

$$\text{(28.)}\qquad x^2 = \frac{-25y^2+55}{14}+\frac{5}{7}\sqrt{y^4-17y^2+25}.$$

Die Curve verläuft reell zwischen den Abscissenwerthen

$$y = \pm\sqrt{\frac{17-\sqrt{189}}{2}}$$

in zwei geschlossenen Theilen, die allenthalben endlich sich in den Punkten $y=\pm 1$, $x=0$ (den Schnittpunkten der Ebene $z=\frac{1}{a}$ mit den Geraden h_1, h_2) gegenseitig schneiden. Die Curve gehört dem in Figur 2. gegebenen Typus an und wird durch die punktirte Ellipse (den Durchschnitt der Ebene der Zeichnung mit dem orthogonalen Kegel) in einen äusseren, dem Winkel 60^0 und einen inneren, dem Winkel 120^0 entsprechenden Theil zerlegt.

2) $\alpha = \varphi$.

$$\varphi = \frac{\pi}{3}, \quad C = \frac{1}{2}; \quad \alpha = \frac{\pi}{3}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Nach (27^a.) wird in diesem Falle der eine der zwei Werthe von x^2 stets unendlich gross; der andere ergiebt

$$(29.) \qquad x = \frac{3}{2\sqrt{2}}\,\frac{y^2-1}{\sqrt{3-y^2}}.$$

Die Curve verläuft reell zwischen $y=\pm\sqrt{3}$ und besteht aus zwei Zweigen, welche sich in $y=\pm 1$, $x=0$ gegenseitig schneiden und für die Abscissenwerthe $y=\pm\sqrt{3}$ ins Unendliche verlaufen, indem die Tangente in diesen Punkten parallel der x-Axe wird. (S. Figur 3.)

3) $\alpha > \varphi$.

$$\varphi = \frac{\pi}{3}, \quad C = \frac{1}{2}; \quad \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad a = 1.$$

$$(30.) \qquad x^2 = -\frac{y^2+1}{2} + \sqrt{y^4-y^2+1}.$$

Einer der zwei Werthe von x^2 (für das negative Vorzeichen der Wurzel) ist stets negativ, die entsprechenden Werthe von x sind daher imaginär. Der andere Werth von x^2 wird dagegen nie negativ. Die Curve verläuft also reell zwischen $y=-\infty$ und $y=+\infty$ und besteht aus zwei Zweigen, die sich in $y=\pm 1$, $x=0$ gegenseitig schneiden und mit den Asymptoten

$$x \pm \frac{y}{\sqrt{2}} = 0$$

ins Unendliche verlaufen. (S. Figur 4.) Der Schnitt der Ebene der Zeich-

nung mit dem in diesem Falle degenerirten orthogonalen Kegel besteht in den beiden Geraden $y = \pm 1$.

Bei allen drei Curvenformen entspricht der von dem orthogonalen Kegel eingeschlossene Theil dem Winkel 120°, der äussere Theil dem Winkel 60°.

§ 5.

Anwendung auf eine Aufgabe der projectivischen Geometrie.

Die ursprüngliche Anregung zur Beschäftigung mit den hier behandelten Gegenständen gab eine Bemerkung bei Gelegenheit einer Vorlesung über projectivische Geometrie. Wenn dort der Beweis geliefert werden soll, dass ein ebenes Strahlenbüschel und eine ihm projectivische Punktreihe in perspective Lage gebracht werden können, wozu es hinreicht, dass irgend drei Strahlen *a, b, c* des ersteren mit den drei entsprechenden Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der letzteren zur Incidenz gebracht werden, so wird wohl allgemein so verfahren, dass die Isogonalcurve der Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ für den Winkel (ab) und die von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ für Winkel (bc) benutzt wird, welche beide ausser Punkt b noch einen weiteren Schnittpunkt (auf jeder Seite der Punktreihe) haben. Bestimmt man umgekehrt durch die perspective Lage der Gebilde erst die projective Beziehung, so geht durch jene Betrachtung gleichzeitig hervor, dass drei beliebigen Elementen des einen Gebildes drei beliebige Elemente des anderen zugewiesen werden können, dadurch aber die Beziehung eindeutig festgelegt ist.

Handelt es sich nun um die entsprechenden Fragen zwischen einem ebenen Strahlbüschel und einem Ebenenbüschel, so wird zur Beantwortung der ersteren, — wie zwei solche projective Gebilde in perspective Lage zu bringen sind, — soviel der Verfasser weiss, stets der Umstand benutzt*), dass es im Strahlbüschel zwei auf einander senkrechte Strahlen giebt, denen im Ebenenbüschel zwei auf einander senkrechte Ebenen entsprechen. Die zweite Frage aber, — wie durch die perspective Lage die projective Beziehung zwischen zwei solchen Gebilden statuirt werden kann, *sodass dabei drei beliebigen Elementen des einen willkürlich drei des anderen zugewiesen werden können,* — scheint überhaupt noch nicht behandelt zu sein. Der

*) Vgl. z. B. *Schröter,* Th. d. Oberfl. II. Ord. u. s. w. § 5 S. 22. — *Reye,* die Geometrie der Lage, I. Abth. 3. Aufl. (1886) S. 193, No. 19, 20, 21.

Wunsch, diese Lücke, — wenn man es so nennen darf, — oder diese Ungleichartigkeit der Behandlung zu beseitigen, veranlasste zu der Beschäftigung mit den ***Isogonalkegeln.*** Im Folgenden soll noch gezeigt werden, wie mittelst dieser Kegelflächen das zweite, also auch das erste, der genannten Probleme in der That gelöst wird. Dabei soll freilich nicht behauptet werden, dass dieser Beweis, als dessen Bestandtheil man die vorstehende Theorie der Isogonalflächen mitzählen muss, einfacher wäre als der sonst übliche. Darf man aber jene Theorie, und zwar präciser lediglich die Existenz der Isogonalkegel, als gegeben ansehen, so ist der Beweis allerdings gerade so einfach wie der entsprechende in der Ebene.

Es seien a, b, c drei ganz beliebige Strahlen eines ebenen Strahlbüschels und α, β, γ drei ganz beliebige Ebenen eines Ebenenbüschels. Dann darf man unbeschadet der Allgemeingültigkeit (weil dies immer durch geeignete Vertauschung der Namen $a, b, c,$ wobei die Namen α, β, γ natürlich in entsprechender Weise geändert werden, zu erreichen ist) annehmen, dass sowohl derjenige Winkel (ab), der nicht durch c getheilt wird, als auch derjenige Winkel (bc), der nicht durch a getheilt wird, $< \frac{\pi}{2}$ ist, oder höchstens einer von beiden $= \frac{\pi}{2} \cdot$ Ferner sind diejenigen Winkel von α und β und von β und γ, die bezw. von γ und α nicht getheilt werden und die wir speciell mit $(\alpha\beta)$ und $(\beta\gamma)$ bezeichnen wollen, zusammengenommen $< \pi$; einer von beiden ist daher sicher spitz; man darf annehmen, dass

$$(\alpha\beta) < \frac{\pi}{2} \cdot$$

Die Strahlen a, b, c sollen mit den Ebenen α, β, γ zur Incidenz gebracht werden.

Dazu ist nur nothwendig zu zeigen, dass die beiden Isogonalkegel von a und b für Winkel $(\alpha\beta)$ und von b und c für Winkel $(\beta\gamma)$ und zwar speciell diejenigen Theile

$$J'_{(\alpha\beta)}(a,\ b) \quad \text{und} \quad J'_{(\beta\gamma)}(b,\ c),$$

welche bezw. dem Winkel $(\alpha\beta)$ und $(\beta\gamma)$ selbst entsprechen, ausser b noch eine zweite Gerade gemein haben.

Ist nun zunächst $(\beta\gamma) \leqq \frac{\pi}{2}$ und bewegt sich dann die Erzeugende des Kegels $J'_{(\alpha\beta)}(ab)$ aus der Lage b heraus, so befindet sie sich im ***Innern*** der Kegelfläche $J'_{(\beta\gamma)}(bc)$; denn jetzt ist $(\alpha\beta) < \pi - (\beta\gamma)$. (S. Fig. 5., welche

einen Schnitt senkrecht zu b in Punkt B nebst den Tangenten an $J'_{(\alpha\beta)}(ab)$ und $J'_{(\beta\gamma)}(bc)$ in B darstellt.)

Ist dagegen $(\beta\gamma) > \frac{\pi}{2}$, so ist doch nach Voraussetzung $(\alpha\beta)+(\beta\gamma) < \pi$, also abermals $(\alpha\beta) < \pi-(\beta\gamma)$. Folglich bewegt sich die Erzeugende von $J'_{(\alpha\beta)}(ab)$ aus der Lage b wiederum zuerst ins *Innere* von $J'_{(\beta\gamma)}(bc)$. (S. Fig. 6.)

In der Lage a ist aber die Erzeugende von $J'_{(\alpha\beta)}(ab)$ in beiden Fällen im *Aeusseren* des Kegels $J'_{(\beta\gamma)}(bc)$, da nach Voraussetzung

$$(ab)+(bc) < \pi.$$

Folglich muss jene Erzeugende bei dem Uebergange von b nach a einmal mindestens auf der Kegelfläche $J'_{(\beta\gamma)}(bc)$ liegen, welchen Werth auch Winkel $(\beta\gamma)$ hat.

Hiermit ist gezeigt, dass die beiden Isogonalkegel

$$J'_{(\alpha\beta)}(ab) \quad \text{und} \quad J'_{(\beta\gamma)}(bc)$$

ausser b stets noch eine Erzeugende gemein haben. Nimmt man diese als Axe des Ebenenbüschels (α, β, γ), so ist das vorgelegte Problem gelöst.

Giessen, im September 1894.

Verallgemeinerung eines Satzes von den algebraischen Integralen der Differentialgleichungen*).

(Von Herrn *Leo Königsberger* in Heidelberg.)

Wenn eine irreductible algebraische Gleichung mit rationalen Coefficienten mit einer gleichartigen algebraischen Gleichung höheren Grades eine Lösung gemein hat, so hat sie bekanntlich alle Lösungen mit ihr gemein; dagegen wird das in eine in der ganzen Ebene convergente Potenzreihe mit rationalen Coefficienten entwickelbare Integral einer Differentialgleichung, welches für eine Lösung jener Gleichung verschwindet, nicht für alle Lösungen derselben den Werth Null annehmen müssen. Eine irreductible algebraische Function y von x wird aber einerseits, wenn einer ihrer Zweige die Lösung einer in x und y algebraischen Gleichung ist, durch alle ihre Zweige die letztere Gleichung befriedigen, andererseits, wenn einer der Zweige einer in x und y algebraischen Differentialgleichung genügt, in allen ihren Zweigen Integrale dieser Differentialgleichung liefern, und zwar ist dies unmittelbar daraus ersichtlich, dass die Differentialquotienten einer algebraischen Function stets rationale Functionen eben dieser und der unabhängigen Variabeln sind, oder auch daraus, dass die verschiedenen Blätter der *Riemann*schen Fläche einer irreductibeln algebraischen Function stets in Verzweigungsschnitten mit einander zusammenhängen. Da nun für irreductible Differentialgleichungen ein solcher Uebergang von einem Integral zum anderen nicht statthat, so tritt die für die weitere Entwickelung der Theorie der Irreductibilität gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen wesentliche Frage auf, welche Beziehungen an Stelle des für algebraische Functionen angeführten Satzes in der Theorie der Differentialgleichungen zu treten haben.

*) Einer der Sätze der vorliegenden Untersuchung wurde in der am 25. Sept. d. J. abgehaltenen Sitzung der „Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ zum Gegenstande einer kurzen Mittheilung gemacht.

Habe zunächst eine algebraische Differentialgleichung $m$ter Ordnung

$$(1.)\qquad f\left(x_1,\ x_2,\ y,\ \frac{\partial y}{\partial x_2},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^m y}{\partial x_2^m}\right) = 0,$$

in welche x_1 als Parameter eintritt und welche in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductibel ist, ein Integral, welches keiner gleichartigen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung als der $m$ten angehört — eine Voraussetzung, die, wenn (1.) irreductibel ist, für jedes der Integrale statthat — mit einer gleichartigen Differentialgleichung höherer Ordnung gemein, so habe ich früher gezeigt, dass dann jedes Integral der ersteren auch der letzteren Genüge leistet, und es möge, so wie bisher eine algebraische Function mit einer Differentialgleichung, jetzt die gewöhnliche Differentialgleichung (1.) zunächst mit einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(2.)\qquad \frac{\partial y}{\partial x_1} = F\left(x_1,\ x_2,\ y,\ \frac{\partial y}{\partial x_2}\right) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = F_1\left(x_1,\ x_2,\ y,\ \frac{\partial y}{\partial x_1}\right)$$

unter der Annahme zusammengestellt werden, dass ein Integral y_1 der ersteren, welches nicht schon einer gleichartigen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung angehört, auch der partiellen Differentialgleichung (2.) Genüge leistet, und untersucht werden, was sich für die anderen Integrale der Differentialgleichung (1.) folgern lässt.

Dass nicht alle Integrale von (1.) auch der partiellen Differentialgleichung (2.) Genüge leisten werden, ist schon daraus ersichtlich, dass bekanntlich das Integral der partiellen Differentialgleichung (2.) bestimmt ist, wenn man den Werth von y für $x_2 = \alpha$ als eine Function von x_1 festsetzt, während für die Differentialgleichung (1.) die Werthe von

$$y,\ \frac{\partial y}{\partial x_2},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{m-1} y}{\partial x_2^{m-1}}$$

für $x_2 = \alpha$ als beliebige von einander unabhängige Functionen von x_1 gegeben sein dürfen. So hat die Differentialgleichung

$$(3.)\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{3}{x_2}\frac{\partial y}{\partial x_2} = 0$$

mit der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(4.)\qquad \frac{\partial y}{\partial x_1} = \left(x_1 x_2 + x_2^3\right)\frac{\partial y}{\partial x_2}$$

das Integral

$$y_1 = \frac{e^{-x_1^2}}{x_2^2} - 2\int e^{-x_1^2} dx_1.$$

welches nicht schon einer gewöhnlichen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung als der zweiten Genüge leistet, gemein, aber es werden nur diejenigen Formen des allgemeinen Integrales

$$y = \frac{\varphi_1(x_1)}{x_2^2} + \varphi_2(x_1)$$

der Differentialgleichung (3.) auch die partielle Differentialgleichung (4.) befriedigen, für welche

$$\varphi_1(x_1) = ce^{-x_1^2}, \quad \varphi_2(x_1) = -2c\int e^{-x_1^2}dx_1 + c_1$$

ist.

Differentiirt man aber die Gleichung (1.) für das gemeinsame Integral y_1 nach x_1, so dass man

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial y_1}{\partial x_2}}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial^m y_1}{\partial x_2^m}}\frac{\partial^m}{\partial x_2^m}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right) = 0$$

erhält, und ersetzt $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$ durch den aus (2.) sich ergebenden Werth

$$F\left(x_1, x_2, y_1, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right),$$

so wird sich aus der Beziehung

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_1}F\left(x_1, x_2, y_1, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial y_1}{\partial x_2}}\frac{\partial}{\partial x_2}F\left(x_1, x_2, y_1, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial^m y_1}{\partial x_2^m}}\frac{\partial^m}{\partial x_2^m}F\left(x_1, x_2, y_1, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right) = 0$$

nach dem oben angeführten Satze schliessen lassen, dass jedes Integral der Differentialgleichung (1.) der Differentialbeziehung

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y}F\left(x_1, x_2, y, \frac{\partial y}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial y}{\partial x_2}}\frac{\partial}{\partial x_2}F\left(x_1, x_2, y, \frac{\partial y}{\partial x_2}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial^m y}{\partial x_2^m}}\frac{\partial^m}{\partial x_2^m}F\left(x_1, x_2, y, \frac{\partial y}{\partial x_2}\right) = 0$$

Genüge leistet, und wir werden zunächst den nachstehenden Satz erhalten:

Wenn eine in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductible gewöhnliche Differentialgleichung (1.) *mit einer partiellen Differential-*

gleichung erster Ordnung (2.) *ein Integral gemein hat, welches nicht schon einer gewöhnlichen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung als der mten Genüge leistet, und man differentiirt die erstere nach* x_1, *ersetzt* $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ *durch den aus der partiellen Differentialgleichung hervorgehenden Werth als Function von* $x_1, x_2, y, \frac{\partial y}{\partial x_2}$, *so wird die resultirende Gleichung für alle Integrale der Differentialgleichung* (1.) *identisch erfüllt werden, ohne dass diese der partiellen Differentialgleichung* (2.) *genügen.*

So wird die Differentialgleichung (3.) durch Differentiation nach x_1 in

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)+\frac{3}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right) = 0$$

und durch Substitution vermöge (4.) in die Differentialgleichung

$$(x_1x_2+x_2^3)\frac{\partial^3 y}{\partial x_2^3}+2(x_1+3x_2^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}+6x_2\frac{\partial y}{\partial x_2}$$
$$+\frac{3}{x_2}\left((x_1x_2+x_2^3)\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}+(x_1+3x_2^2)\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) = 0$$

übergehen, die in der That für alle Formen von $y = \frac{\varphi_1(x_1)}{x_2^2}+\varphi_2(x_1)$ identisch erfüllt wird.

In dieser einfachen Gestalt ist aber die Gültigkeit des Satzes auf die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung beschränkt, und um zu sehen, nach welcher Richtung die Untersuchung sich zu erstrecken hat, um allgemein das Analogon für jenen Satz von der Gültigkeit aller Zweige einer algebraischen Function als Integrale von Differentialgleichungen zu erhalten, stellen wir zunächst mit der Differentialgleichung (1.) die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(5.)\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = F\left(x_1,\ x_2,\ y,\ \frac{\partial y}{\partial x_1},\ \frac{\partial y}{\partial x_2},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)$$

zusammen und nehmen wieder an, dass ein Integral y_1 der Differentialgleichung (1.) auch der partiellen Differentialgleichung (5.) Genüge leistet, wie es z. B. für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(6.)\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}+\frac{2}{x_2}\frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{2x_1}{x_2^4}$$

und die partielle Differentialgleichung

$$(7.)\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = -\frac{2x_1+2}{x_2^2}-2x_1\frac{\partial y}{\partial x_1}-(2x_1+1)x_2\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2}$$

der Fall ist, die das gemeinsame Integral

$$y_1 = \frac{x_1}{x_2^2} + \frac{e^{x_1}}{x_2} + \int e^{-x_1^2} dx_1 \tag{8.}$$

besitzen.

Differentiirt man die Differentialgleichung (1.) für $y = y_1$ partiell nach x_1, so dass man

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial y_1}{\partial x_2}}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial^m y_1}{\partial x_2^m}}\frac{\partial^m}{\partial x_2^m}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right) = 0 \tag{9.}$$

erhält, und führt eine nochmalige Differentiation nach x_1 aus, so dass sich

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial \frac{\partial^m y_1}{\partial x_2^m}}\frac{\partial^m}{\partial x_2^m}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right) \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial \frac{\partial^m y_1}{\partial x_2^m}}\frac{\partial^m}{\partial x_2^m}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)\right)\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} \\ &+ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\qquad + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial^m y_1}{\partial x_2^m}}\frac{\partial^m}{\partial x_2^m}\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}\right) = 0 \end{aligned}\right. \tag{10.}$$

ergiebt, so mag die Gleichung (10.), wenn $\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}$ durch den aus (5.) sich ergebenden Werth

$$F\left(x_1,\ x_2,\ y_1,\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1},\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2},\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2},\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2}\right)$$

ersetzt wird, in

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi\left(x_1,\ x_2,\ y_1,\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2},\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{m+2} y_1}{\partial x_2^{m+2}},\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right),\right. \\ &\qquad\qquad \left.\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right),\ \ldots,\ \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_2^{m+1}}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)\right) = 0 \end{aligned}\right. \tag{11.}$$

übergehen, und es fragt sich nun, was aus dem Zusammenbestehen von (9.) und (11.) gefolgert werden kann. Setzt man zur Abkürzung $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = u_1$, so werden (9.) und (11.) die Form annehmen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_1}u_1 + \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial y_1}{\partial x_2}}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial^m y_1}{\partial x_2^m}}\frac{\partial^m u_1}{\partial x_2^m} = 0, \tag{12.}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi\left(x_1,\ x_2,\ y_1,\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2},\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{m+2} y_1}{\partial x_2^{m+2}},\ u_1,\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2},\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2},\ \ldots,\right. \\ &\qquad\qquad \left.\frac{\partial^{m+1} u_1}{\partial x_2^{m+1}}\right) = 0, \end{aligned}\right. \tag{13.}$$

von denen die erstere die Differentialquotienten von y_1 in Bezug auf x_2 bis zur $m$ten Ordnung enthält. Nach bekannten Principien erhält man alle gleichzeitigen Integralsysteme der beiden Differentialgleichungen

$$(14.)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial y}u+\frac{\partial f}{\partial \frac{\partial y}{\partial x_2}}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial \frac{\partial^m y}{\partial x_2^m}}\frac{\partial^m u}{\partial x_2^m} = 0,$$

$$(15.)\qquad \varphi\left(x_1,\ x_2,\ y,\ \frac{\partial y}{\partial x_2},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{m+2} y}{\partial x_2^{m+2}},\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{m+1} u}{\partial x_2^{m+1}}\right) = 0,$$

und nur diese, indem man die Gleichung (14.) $(m+1)$-mal, die Gleichung (15.) m-mal nach x_2 differentiirt, zwischen den so entstehenden $2m+3$ Gleichungen die $2m+2$ Grössen

$$u,\ \frac{\partial u}{\partial x_2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x_2^{2m+1}}$$

eliminirt und zu jedem Integrale des so entstehenden Eliminationsresultates

$$(16.)\qquad \psi\left(x_1,\ x_2,\ y,\ \frac{\partial y}{\partial x_2},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{2m+2} y}{\partial x_2^{2m+2}}\right) = 0$$

die im allgemeinen auf algebraischem Wege sich ergebenden Werthe von u herstellt, wobei auch, wie aus der Eliminationstheorie bekannt ist, in speciellen Fällen sich nur eine Beziehung zwischen u und dessen Ableitungen zu ergeben braucht. Da aber das den beiden Differentialgleichungen (1.) und (5.) der Voraussetzung nach gemeinsam genügende Integral y_1 nunmehr auch die Differentialgleichung (16.) befriedigen muss, und in Folge der für y_1 gemachten Annahme also auch jedes Integral von (1.) ein Integral von (16.) sein wird, so werden alle Integrale der Differentialgleichung (1.) nebst den dazugehörigen, vermöge der bezeichneten Elimination sich ergebenden Werthen von u den Differentialgleichungen (14.) und (15.) Genüge leisten, und wir können somit zunächst den folgenden Satz aussprechen:

Wenn die in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductible Differentialgleichung (1.) *mit der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung* (5.) *ein Integral gemein hat, welches nicht schon einer gewöhnlichen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung angehört, und man differentiirt die Differentialgleichung* (1.) *zweimal nach* x_1 *und ersetzt* $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}$ *durch den aus* (5.) *entnommenen Werth, so wird die so sich ergebende Beziehung durch alle Integrale der Differentialgleichung* (1.) *befriedigt werden, wenn man nur für* $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ *ein passendes Integral der in* u *linearen Differentialgleichung* m*ter Ordnung* (14.) *substituirt,*

wobei also der Werth von u nicht der nach x_1 genommene Differentialquotient des beliebig herausgegriffenen Integrales y der Differentialgleichung (1.) zu sein braucht.

Da man aber in der Gleichung (11.) die Differentialquotienten $m$ter und höherer Ordnung von y_1 nach x_2 genommen vermöge (1.) durch die niedrigeren bis zur $(m-1)$-ten Ordnung ausdrücken kann, ferner die durch diese Substitution aus (11.) resultirende Gleichung, wenn angenommen wird, dass y_1 keiner algebraischen partiellen Differentialgleichung genügen soll, in welcher die partiellen Differentialquotienten nach x_1 höchstens in der ersten Ordnung, die nach x_2 nur bis zur $(m-1)$-ten Ordnung vorkommen sollen, eine identische sein muss, so werden offenbar alle Integrale der Differentialgleichung (1.) der Gleichung (11.) genügen, und wir erhalten daher den folgenden Satz:

Wenn die gewöhnliche, in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductible Differentialgleichung $m$ter Ordnung (1.) *mit der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung* (5.) *ein Integral gemein hat, welches nicht schon einer partiellen Differentialgleichung genügt, in welcher die partiellen Differentialquotienten nach x_1 genommen höchstens zur ersten, die nach x_2 genommenen höchstens zur $(m-1)$-ten Ordnung vorkommen, so wird die durch zweimalige Differentiation von* (1.) *nach x_1 und Substitution des Werthes von $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}$ aus* (5.) *hervorgehende Gleichung durch alle Integrale der Differentialgleichung* (1.) *befriedigt werden.*

Aber diese letztere Gleichung kann auch ohne jene Annahme befriedigt werden; differentiirt man z. B. die Gleichung (6.) zweimal nach x_1 und setzt für $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}$ den aus (7.) resultirenden Werth, so erhält man

$$(17.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Big(-\frac{2x_1+2}{x_2^2}-2x_1\frac{\partial y}{\partial x_1}-(2x_1+1)x_2\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2}\Big) \\ \qquad +\frac{2}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(-\frac{2x_1+2}{x_2^2}-2x_1\frac{\partial y}{\partial x_1}-(2x_1+1)x_2\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2}\Big) = 0, \end{cases}$$

welche Gleichung in der That durch das allgemeine Integral von (6.), welches die Form hat

$$y = \frac{x_1}{x_2^2}+\frac{\varphi_1(x_1)}{x_2}+\varphi_2(x_1),$$

da

$$-\frac{2x_1+2}{x_2^2}-2x_1\frac{\partial y}{\partial x_1}-(2x_1+1)x_2\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2} = -2x_1\varphi_2'(x_1)+\frac{\varphi_1'(x_1)}{x_2}$$

ist, wie durch Einsetzen in (17.) unmittelbar zu sehen, befriedigt wird. Nun genügt aber das Integral (8.), da

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2^2} + \frac{e^{x_1}}{x_2} + e^{-x_1^2}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = -\frac{2x_1}{x_2^3} - \frac{e^{x_1}}{x_2^2}, \quad \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{2}{x_2^3} - \frac{e^{x_1}}{x_2^2}$$

ist, einer algebraischen Differentialgleichung der Form

$$\omega\left(x_1, x_2, y_1, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2}\right) = 0,$$

in welcher einerseits y_1 nicht vorkommen darf, weil sich sonst $\int e^{-x_1^2} dx_1$ algebraisch durch $x_1, e^{x_1}, e^{-x_1^2}$ ausdrücken liesse, andererseits $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$ fehlen muss, da im entgegengesetzten Falle eine algebraische Beziehung zwischen x_1, e^{x_1}, $e^{-x_1^2}$ bestände, die also in einer unmittelbar ersichtlichen algebraischen Beziehung zwischen $\frac{\partial y_1}{\partial x_2}$ und $\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2}$ besteht — es ist somit die oben gemachte Voraussetzung unseres Satzes nicht erfüllt, dass y_1 nicht schon einer Differentialgleichung genüge, in welcher die nach x_1 und x_2 genommenen Differentialquotienten nicht in einer höheren Ordnung als der ersten vorkommen. Endlich mag noch der oben ausgeführte Eliminationsprocess auf unser Beispiel angewandt werden; differentiirt man die Gleichung (6.) nach x_1 und setzt $\frac{\partial y}{\partial x_1} = u$, so ergiebt sich

$$\text{(18.)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{2}{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{2}{x_2^4},$$

und durch nochmalige Differentiation nach x_1 und Substitution des Werthes von $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}$ aus Gleichung (7.) nach (17.):

$$\text{(19.)} \quad (2x_1+1)x_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} + (10x_1+4)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{8x_1+2}{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{4x_1+4}{x_2^4};$$

differentiirt man (18.) nach x_2, so dass sich

$$\text{(20.)} \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} + \frac{2}{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{2}{x_2^2}\frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{8}{x_2^5}$$

ergiebt, und eliminirt $\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}$ zwischen (19.) und (20.), so erhält man die Differentialgleichung (18.), wonach, wie oben bereits direct nachgewiesen, auch aus dem Eliminationsprocess folgt, dass der jedem Integralwerthe der Differentialgleichung (6.) zugehörige Werth von u der nach x_1 genommene Differentialquotient des resp. Integralwerthes ist.

Nach Herleitung des oben ausgesprochenen Satzes erkennt man unmittelbar die Richtigkeit des nachfolgenden Theorems:

Hat eine gewöhnliche, in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductible Differentialgleichung mter Ordnung

$$(21.)\qquad f\left(x_1,\ x_2,\ y,\ \frac{\partial y}{\partial x_2},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^m y}{\partial x_2^m}\right) = 0$$

mit einer algebraischen partiellen Differentialgleichung μter Ordnung in Bezug auf x_1

$$(22.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^\mu y}{\partial x_1^\mu} = F\Big(x_1,\ x_2,\ y,\ \dfrac{\partial y}{\partial x_1},\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2},\ \ldots,\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2},\ \dfrac{\partial^3 y}{\partial x_1^2 \partial x_2},\ \ldots, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial^{\mu-1} y}{\partial x_1^{\mu-1}},\ \dfrac{\partial^\mu y}{\partial x_1^{\mu-1}\partial x_2},\ \ldots,\ \dfrac{\partial^\varrho y}{\partial x_2^\varrho}\Big) \end{cases}$$

ein Integral gemein, welches nicht schon einer algebraischen Differentialgleichung Genüge leistet, deren Differentialquotienten in Bezug auf x_1 *sich höchstens bis zur* $(\mu-1)$*-ten Ordnung, in Bezug auf* x_2 *höchstens bis zur* $(m-1)$*-ten Ordnung erheben, und man differentiirt die Gleichung* (21.) *μ-mal nach* x_1 *und ersetzt in der so erhaltenen Gleichung* $\frac{\partial^\mu y}{\partial x_1^\mu}$ *durch den vermöge* (22.) *gegebenen Werth, so wird die so resultirende Gleichung durch jedes Integral der Differentialgleichung* (21.) *befriedigt werden.*

Es bleibt somit endlich noch übrig, die behandelte Frage für die Zusammenstellung von zwei partiellen Differentialgleichungen zu erörtern, und man sieht ohne Schwierigkeit, dass der allgemeine Satz, welcher das Analogon zu dem Satze bildet, dass, wenn eine algebraische Gleichung eine Lösung, welche nicht schon Lösung einer algebraischen Gleichung niedrigeren Grades ist, mit einer algebraischen Differentialgleichung gemein hat, sie alle mit ihr gemein haben muss, nunmehr folgendermassen lautet:

Wenn eine algebraische partielle Differentialgleichung

$$(23.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^m y}{\partial x_2^m} = f\Big(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_\nu,\ \dfrac{\partial y}{\partial x_2},\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_3},\ \ldots, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial^{m-1} y}{\partial x_2^{m-1}},\ \dfrac{\partial^m y}{\partial x_2^{m-1}\partial x_3},\ \ldots,\ \dfrac{\partial^\sigma y}{\partial x_\nu^\sigma}\Big), \end{cases}$$

welche in Bezug auf x_2 *von der mten Ordnung ist, und in welcher f eine algebraisch irreductible Function der eingeschlossenen Grössen bedeutet, mit*

einer algebraischen partiellen Differentialgleichung

$$(24.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^{\mu} y}{\partial x_1^{\mu}} = F\Big(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{\nu},\ \dfrac{\partial y}{\partial x_1},\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2},\ \ldots, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial^{\mu-1} y}{\partial x_1^{\mu-1}},\ \dfrac{\partial^{\mu} y}{\partial x_1^{\mu-1}\partial x_2},\ \ldots,\ \dfrac{\partial^{\tau} y}{\partial x_{\varrho}^{\tau}},\ \ldots\Big), \end{cases}$$

welche in Bezug auf x_1 *von der* μ *ten Ordnung ist, ein Integral gemein hat, welches nicht schon einer algebraischen Differentialgleichung genügt, welche in Bezug auf* x_1 *sich höchstens bis zur* $(\mu-1)$*-ten, in Bezug auf* x_2 *höchstens bis zur* $(m-1)$*-ten Ordnung erhebt, so wird die durch* μ*-malige nach* x_1 *ausgeführte Differentiation der Gleichung* (23.) *und durch Substitution des durch Gleichung* (24.) *gegebenen Werthes von* $\dfrac{\partial^{\mu} y}{\partial x_1^{\mu}}$ *resultirende Differentialgleichung durch alle Integrale der partiellen Differentialgleichung* (23.) *befriedigt werden.*

Heidelberg, den 3. October 1894.

Ueber lineare Differentialgleichungen mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten.

(Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.)

In der vorliegenden Abhandlung werden lineare Differentialgleichungen untersucht, in welchen die Coefficienten der Differentialquotienten rationale Ausdrücke der unabhängigen Variablen und von algebraischen Functionen derselben sind; es kommen homogene und nichthomogene Differentialgleichungen zur Behandlung. Die erste Abtheilung enthält allgemeine Betrachtungen über solche Differentialgleichungen. In der zweiten Abtheilung werden reguläre Differentialgleichungen definirt, und es wird ein Typus von solchen aufgestellt, alsdann werden die Differentialgleichungen mit regulärem Differentialausdrucke untersucht. In der dritten Abtheilung wird gezeigt, dass die linear unabhängigen Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung mit beliebigen algebraischen Coefficienten die Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten sind, und dass man diese Differentialgleichung im allgemeinen aufstellen kann. Dieselbe wird dann zur Ermittelung der Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung verwandt.

Erste Abtheilung.

Allgemeines.

1.

Definition der hier behandelten linearen Differentialgleichungen.

Es werden homogene und nichthomogene lineare Differentialgleichungen betrachtet; die Coefficienten in dem homogenen linearen Differentialausdrucke sind rationale Functionen der unabhängigen Variablen x und einer oder mehrerer irreductiblen algebraischen Functionen derselben, der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1. Hier soll das Schema von

drei algebraischen Functionen u, v, w angenommen werden. Man kann voraussetzen, dass in der Gleichung jeder der algebraischen Functionen u, v, w der Coefficient der höchsten Potenz von u, v, w gleich 1, die übrigen Coefficiënten ganze rationale Functionen von x sind, da man sonst nach Multiplication der ursprünglichen algebraischen Function mit einer ganzen rationalen Function von x auf diesen Fall kommt. Von den Coefficienten in dem homogenen Differentialausdrucke kann man voraussetzen, dass sie auf die Form eines Quotienten gebracht sind, dessen Zähler eine ganze rationale Function von x, u, v, w und dessen Nenner eine ganze rationale Function von x ist. Wenn man einen Coefficienten der Differentialgleichung unter der Form eines Quotienten $\frac{H}{K}$ von ganzen rationalen Functionen von x, u, v, w hat, so darf, da die Zweige von u, v, w beliebig combinirt werden können, K für keine dieser Combinationen identisch verschwinden. Die α Zweige von u seien durch u_1 bis u_α, die β Zweige von v durch v_1 bis v_β, die γ Zweige von w durch w_1 bis w_γ bezeichnet. Es wird, wenn im Nenner $K(x, u_r, v_s, w_t)$ steht, im Zähler und Nenner das Product der $\alpha\beta\gamma-1$ Factoren $K(x, u_a, v_b, w_c)$ zugefügt, wo a, b, c alle übrigen Combinationen der Zahlen 1 bis α, 1 bis β, 1 bis γ sind. Dann wird das Product $\prod_{a=1}^{a=\alpha} K(x, u_a, v_b, w_c)$ unter Hinzuziehung der Gleichung für u ein ganzer rationaler Ausdruck von x, v_b, w_c; ferner das Product

$$\prod_{a=1}^{a=\alpha}\prod_{b=1}^{b=\beta} K(x,\ u_a,\ v_b,\ w_c)$$

unter Zuhülfenahme der Gleichung für v ein ganzer rationaler Ausdruck von x und w_c; und das Product

$$\prod_{a=1}^{a=\alpha}\prod_{b=1}^{b=\beta}\prod_{c=1}^{c=\gamma} K(x,\ u_a,\ v_b,\ w_c)$$

mittelst der Gleichung für w eine ganze rationale Function von x. Im Zähler steht ausser $H(x, u_r, v_s, w_t)$ das Product der K, in welchem der Factor $K(x, u_r, v_s, w_t)$ fehlt. Dieses Product besteht aus den einzelnen Producten, erstens wo in keinem der Factoren eine der Grössen u_r, v_s, w_t vorkommt, zweitens wo nur eine dieser Grössen in allen Factoren sich vorfindet, drittens wo zwei derselben in den Factoren enthalten sind. Jedes dieser Producte wird auf dieselbe Weise eine ganze rationale Function von x, u_r, v_s, w_t.

Die singulären Punkte der homogenen linearen Differentialgleichung sind: Im Endlichen die Punkte, in denen die Discriminanten der Gleichungen von u, v, w verschwinden, und die Punkte, in denen die ganzen rationalen Functionen von x in den Nennern der Coefficienten der Differentialgleichung (nachdem ein gemeinschaftlicher Theiler der ganzen rationalen Functionen von x im Zähler und Nenner weggestrichen ist) verschwinden; sodann wird der Punkt x im Unendlichen zu den singulären Punkten gerechnet. Bei nichthomogenen linearen Differentialgleichungen sollen über den zweiten Theil in der Differentialgleichung diejenigen Voraussetzungen gemacht werden, welche in der Abhandlung des Verfassers in Bd. 107 dieses Journals über nichthomogene lineare Differentialgleichungen gemacht sind. Alsdann treten zu den vorigen singulären Punkten noch die in No. 1 der genannten Abhandlung angegebenen in endlicher Anzahl hinzu.

Durch die singulären Punkte wird eine in sich zurücklaufende, sich selbst nicht schneidende Linie gezogen. Die Constructionsebene für die Werthe x, als einblättrige Fläche betrachtet, zerfällt dadurch in zwei Gebiete. In jedem dieser beiden Gebiete giebt es α Blätter, innerhalb deren die algebraische Function u einwerthig und stetig verläuft, β bei v, γ bei w. An der Stelle eines einfach zusammenhängenden Gebietes von x, welches keinen der singulären Punkte enthält, ergeben sich durch Combination der Zweige von u, v, w Bereiche von x in der Anzahl des Productes $\alpha\beta\gamma$, innerhalb deren ein Integral einwerthig und stetig verläuft.

Von den singulären Punkten im Endlichen seien Linien, die sich selbst und unter einander nicht schneiden, ins Unendliche gezogen. Es seien $\alpha\beta\gamma$ durch diese Linien begrenzte Blätter den $\alpha\beta\gamma$ Combinationen der α Blätter von u, der β Blätter von v, der γ Blätter von w zugeordnet. Diese den Combinationen zugeordneten Blätter bilden eine oder mehrere Gruppen, so dass bei beliebiger Fortsetzung die Blätter einer Gruppe allein unter einander zusammenhängen. Es mögen zum Beispiel nur zwei irreductible algebraische Functionen u und v auf ein und derselben *Riemann*schen Fläche vorliegen. Geht man dann von demselben Blatte bei beiden Functionen aus, so bleibt man auf allen Wegen der Variablen x (die nicht durch die Windungspunkte hindurchführen) in dieser Fläche. Geht man dagegen von der Combination zweier verschiedenen Blätter aus und macht dann auf beliebigen solchen Wegen die Fortsetzung in der Fläche, so kann man nicht auf den vorigen Fall, nämlich die Combination derselben Blätter

der Fläche zurückkommen. Wenn man von irgend einer Combination der Blätter der *Riemann*schen Flächen, die den irreductiblen algebraischen Functionen u, v, w entsprechen, ausgeht, so erhält man, da die Anzahl der Combinationen der Blätter endlich ist, bei Fortgang der Variablen x auf beliebigen Wegen in den Flächen (die nicht durch die Windungspunkte hindurchgehen) eine Gruppe unter einander zusammenhängender Combinationen. Die durch die oben genannten Linien begrenzten Blätter, welche diesen Combinationen zugeordnet sind, stehen daher in dem Zusammenhange, dass sie eine *Riemann*sche Fläche T bilden. Ueber diese Fläche T breitet sich das Gebiet der unabhängigen Variablen bei der einzelnen algebraischen Function u, v, w wieder aus. Die Gleichung dieser Function, auf die Fläche T bezogen, enthält als Gleichungspolynom die Potenz eines irreductiblen Gleichungspolynomes (*Riemann*, *Abel*sche Functionen No. 5). Daher ist die Anzahl der Blätter der Fläche T ein Vielfaches von α, β, γ. Sind letztere Zahlen relative Primzahlen, so stehen mithin alle $\alpha\beta\gamma$ Combinationen der Blätter von u, v, w in Zusammenhang.

Wenn man eine irreductible algebraische Function auf der vorhin genannten *Riemann*schen Fläche T kennt, so kann man die einzelne algebraische Function u, v, w rational durch jene Function und x ausdrücken und dadurch alle Combinationen der Functionszweige, denen die Blätter von T zugeordnet sind, vermittelst einer einzigen algebraischen Function darstellen und letztere in die Coefficienten der Differentialgleichung einführen. Auf diese Weise zerfällt die ursprüngliche Differentialgleichung in solche, in denen jedesmal nur eine einzige algebraische Function in den Coefficienten vorkommt.

Für die Entwickelung der Integrale wird die ursprüngliche Differentialgleichung, in der eine oder mehrere algebraische Functionen in den Coefficienten enthalten sind, beibehalten. Die Betrachtung dieser ursprünglichen Differentialgleichung ist erforderlich, um bei einem Typus von Differentialgleichungen, von dem in der zweiten Abtheilung die Rede sein wird, unmittelbar die Regularität der Integrale zu erkennen.

2.

Die in der Umgebung eines Punktes zusammenhängenden Combinationen der Zweige der algebraischen Functionen.

Die in der vorigen Nummer betrachteten $\alpha\beta\gamma$ Combinationen der Functionszweige der algebraischen Functionen u, v, w, oder Combinationen

der Blätter für u, v, w bilden bei dem *einzelnen* singulären Punkte Complexe, so dass die Elemente eines Complexes in der Umgebung des singulären Punktes allein unter einander zusammenhängen.

Bei einem solchen Punkte $x = a$ seien für die algebraischen Functionen u, v, w beliebig Windungspunkte oder gewöhnliche Punkte vorhanden, letztere sollen hier als einblättrige Windungspunkte in Betracht gezogen werden. Es mögen nun je ein Windungspunkt von u, v, w einander zugeordnet werden, bei u ein λ-blättriger, bei v ein μ-blättriger, bei w ein ν-blättriger, so sind in dieser Zuordnung $\lambda\mu\nu$ Combinationen der Functionszweige vertreten. Dieselben gruppiren sich in folgenden Complexen. Bei $x = \infty$, $x = \frac{1}{t}$, findet das Entsprechende statt.

Die Entwickelung von u bei dem λ-blättrigen Windungspunkt ist eine Potenzreihe in Bezug auf $(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}$ mit ganzzahligen Exponenten. Man erhält die zugehörigen λ Zweige von u, wenn an Stelle von $(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}$ gesetzt wird $(x-a)^{\frac{1}{\lambda}} e^{\frac{2\pi i\lambda'}{\lambda}}$ $(\lambda' = 0, \dots, \lambda-1)$. Entsprechend bei v und w. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von λ, μ, ν sei R. Nun sei $(x-a)^{\frac{1}{R}} = \zeta$, wobei man von einem der R Zweige von $(x-a)^{\frac{1}{R}}$ ausgeht; $e^{\frac{2\pi i}{R}}$ sei durch ω bezeichnet. Dann ist $(x-a)^{\frac{1}{\lambda}} = \zeta^L$, $R = \lambda L$, $e^{\frac{2\pi i}{\lambda}} = \omega^L$. Man erhält also die λ Zweige von u, wenn in der Entwickelung von u an Stelle von $(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}$ tritt $\zeta^L \omega^{\lambda' L}$ $(\lambda' = 0, \dots, \lambda-1)$. Ebenso erhält man die μ Zweige von v, wenn in der Entwickelung von v an Stelle von $(x-a)^{\frac{1}{\mu}}$ tritt $\zeta^M \omega^{\mu' M}$, $R = \mu M$, $(\mu' = 0, \dots, \mu-1)$; und die ν Zweige von w, wenn in der Entwickelung von w an Stelle von $(x-a)^{\frac{1}{\nu}}$ tritt $\zeta^N \omega^{\nu' N}$, $R = \nu N$, $(\nu' = 0, \dots, \nu-1)$.

Es gehen also die oben genannten $\lambda\mu\nu$ Combinationen hervor, wenn bei $\zeta^L \omega^{\lambda' L}$ in der Entwickelung von u, bei $\zeta^M \omega^{\mu' M}$ in der Entwickelung von v, bei $\zeta^N \omega^{\nu' N}$ in der Entwickelung von w für λ' die Zahlen 0 bis $\lambda-1$, für μ' die Zahlen 0 bis $\mu-1$, für ν' die Zahlen 0 bis $\nu-1$ gesetzt und aus diesen Zahlen alle Combinationen gebildet werden.

Wenn nun in der Entwickelung von u ζ^L an Stelle von $(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}$ gesetzt ist, in der Entwickelung von v ζ^M an Stelle von $(x-a)^{\frac{1}{\mu}}$, in der

Entwickelung von w ζ^N an Stelle von $(x-a)^{\frac{1}{\nu}}$, so sollen in $\zeta=(x-a)^{\frac{1}{R}}$ $R-1$ Umgänge um $x=a$ (in positiver Richtung) vorgenommen werden, nach dem Rten Umgange kehrt $(x-a)^{\frac{1}{R}}$ in den ursprünglichen Werth zurück. Hierdurch tritt in der Entwickelung von u an Stelle von ζ^L successive ζ^L, $\zeta^L\omega^L$, $\zeta^L\omega^{2L}$ bis $\zeta^L\omega^{(R-1)L}$, gleichzeitig tritt in der Entwickelung von v an Stelle von ζ^M successive ζ^M, $\zeta^M\omega^M$, $\zeta^M\omega^{2M}$ bis $\zeta^M\omega^{(R-1)M}$ und in der Entwickelung von w an Stelle von ζ^N successive ζ^N, $\zeta^N\omega^N$, $\zeta^N\omega^{2N}$ bis $\zeta^N\omega^{(R-1)N}$. Die diesen Combinationen entsprechenden Zahlen λ' in $\omega^{\lambda' L}$ aus der Reihe 0 bis $\lambda-1$, μ' in $\omega^{\mu' M}$ aus der Reihe 0 bis $\mu-1$, ν' in $\omega^{\nu' N}$ aus der Reihe 0 bis $\nu-1$ ergeben sich, wenn in den Congruenzen

$$(1.)\qquad \begin{cases} z \equiv \varrho \pmod{\lambda}, \\ z \equiv \sigma \pmod{\mu}, \\ z \equiv \tau \pmod{\nu} \end{cases}$$

für z die Zahlen 0 bis $R-1$ gesetzt und für ϱ, σ, τ die kleinsten positiven Reste genommen werden. Ist z_1 eine Zahl, welche diese Congruenzen für eine Combination ϱ, σ, τ befriedigt, so sind die sämmtlichen Zahlen von derselben Eigenschaft durch $z\equiv z_1 \pmod{R}$ gegeben. Daher findet man, wenn für z die Zahlen 0 bis $R-1$ gesetzt werden, R verschiedene Combinationen ϱ, σ, τ. Dieses sind alle Combinationen, für welche die Congruenzen gelten.

Man erhält also, wenn die für $z=0$ bis $R-1$ aus (1.) auf einander folgenden Combinationen ϱ, σ, τ für λ', μ', ν' in $\zeta^L\omega^{\lambda' L}$, $\zeta^M\omega^{\mu' M}$, $\zeta^N\omega^{\nu' N}$ in den Entwickelungen von u, v, w gesetzt werden, R von den oben genannten $\lambda\mu\nu$ Combinationen der Zweige. Diese Combinationen gehen durch Umgang um $x=a$ successive hervor, nach R-maligem Umgang kommt man zu der ursprünglichen Combination zurück. Die Entwickelungen der in diesen Combinationen zusammengehörigen Zweige erhält man, wenn in der Entwickelung von u an Stelle von $(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}$ die Grösse ζ^L, bei v an Stelle von $(x-a)^{\frac{1}{\mu}}$ die Grösse ζ^M, bei w an Stelle von $(x-a)^{\frac{1}{\nu}}$ die Grösse ζ^N steht, hierauf in $\zeta=(x-a)^{\frac{1}{R}}$ $R-1$ Umgänge um $x=a$ gemacht werden. Diese R zusammenhängenden Combinationen der Zweige bilden einen Complex.

Wenn eine Combination λ_1, μ_1, ν_1, wo λ_1 aus 0 bis $\lambda-1$, μ_1 aus 0 bis $\mu-1$, ν_1 aus 0 bis $\nu-1$ hervorgeht, nicht unter den R Combinationen ϱ, σ, τ

aus (1.) enthalten ist, so sind die R Combinationen ϱ', σ', τ' der kleinsten positiven Reste, die aus den Congruenzen

$$(2.)\qquad \begin{cases} \lambda_1+z \equiv \varrho' & (\text{mod.}\,\lambda),\\ \mu_1+z \equiv \sigma' & (\text{mod.}\,\mu),\\ \nu_1+z \equiv \tau' & (\text{mod.}\,\nu)\end{cases}$$

für $z=0$ bis $R-1$ hervorgehen, unter einander und von denen in (1.) verschieden. Aus

$$\lambda_1+z_1 \equiv z \ (\text{mod.}\,\lambda),\quad \mu_1+z_1 \equiv z \ (\text{mod.}\,\mu),\quad \nu_1+z_1 \equiv z \ (\text{mod.}\,\nu),$$

wo z, z_1 zwei Zahlen aus der Reihe 0 bis $R-1$ sind, würde folgen, dass λ_1, μ_1, ν_1 unter den Combinationen (1.) wäre.

Die R Combinationen ϱ', σ', τ' aus (2.) *für λ', μ', ν' gesetzt, liefern einen zweiten Complex von R zusammenhängenden Combinationen der Zweige. Die Entwickelungen der in den Combinationen zusammengehörigen Zweige erhält man, wenn in der Entwickelung von u an Stelle von $(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}$ die Grösse $\zeta^L\omega^{\lambda_1 L}$, bei v an Stelle von $(x-a)^{\frac{1}{\mu}}$ die Grösse $\zeta^M\omega^{\mu_1 M}$, bei w an Stelle von $(x-a)^{\frac{1}{\nu}}$ die Grösse $\zeta^N\omega^{\nu_1 N}$ tritt, dazu in $\zeta=(x-a)^{\frac{1}{R}}$ $R-1$ Umgänge um $x=a$ gemacht werden.* Hätte man an Stelle von λ_1, μ_1, ν_1 eine Combination ϱ_1', σ_1', τ_1' aus (2.) gesetzt, so würde man wieder auf die Combinationen (2.) in derselben Reihenfolge kommen. Die Entwickelungen bleiben dieselben; man geht dann von den Zweigen aus, in denen an Stelle von ζ steht $\omega^{z_1}\zeta$, wo z_1 gegeben wird durch

$$\lambda_1+z_1 \equiv \varrho_1' \ (\text{mod.}\,\lambda),\quad \mu_1+z_1 \equiv \sigma_1' \ (\text{mod.}\,\mu),\quad \nu_1+z_1 \equiv \tau_1' \ (\text{mod.}\,\nu).$$

Wenn ferner eine Combination λ_2, μ_2, ν_2, wo λ_2 aus 0 bis $\lambda-1$, μ_2 aus 0 bis $\mu-1$, ν_2 aus 0 bis $\nu-1$ hervorgeht, nicht unter den R Combinationen ϱ, σ, τ (1.) und den R Combinationen ϱ', σ', τ' (2.) enthalten ist, so sind die R Combinationen ϱ'', σ'', τ'' der kleinsten positiven Reste, die aus den Congruenzen

$$(3.)\qquad \begin{cases} \lambda_2+z \equiv \varrho'' & (\text{mod.}\,\lambda),\\ \mu_2+z \equiv \sigma'' & (\text{mod.}\,\mu),\\ \nu_2+z \equiv \tau'' & (\text{mod.}\,\nu)\end{cases}$$

für $z=0$ bis $R-1$ hervorgehen, unter einander und von denen in (1.) und (2.) verschieden. Aus

$$\lambda_2+z_2 \equiv \lambda_1+z_1 \ (\text{mod.}\,\lambda),\quad \mu_2+z_2 \equiv \mu_1+z_1 \ (\text{mod.}\,\mu),\quad \nu_2+z_2 \equiv \nu_1+z_1 \ (\text{mod.}\,\nu),$$

s_1, s_2 zwei Zahlen aus der Reihe 0 bis $R-1$, würde folgen, dass λ_2, μ_2, ν_2 unter den Combinationen (2.) wäre.

Die R Combinationen ϱ'', σ'', τ'' aus (3.) *für λ', μ', ν' gesetzt, liefern einen dritten Complex von R zusammenhängenden Combinationen der Zweige. Die Entwickelungen der in den Combinationen zusammengehörigen Zweige ergeben sich, wenn in der Entwickelung von u an Stelle von $(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}$ die Grösse $\zeta^L\omega^{\lambda_2 L}$, bei v an Stelle von $(x-a)^{\frac{1}{\mu}}$ die Grösse $\zeta^M\omega^{\mu_2 M}$, bei w an Stelle von $(x-a)^{\frac{1}{\nu}}$ die Grösse $\zeta^N\omega^{\nu_2 N}$ tritt, dazu in $\zeta=(x-a)^{\frac{1}{R}}$ $R-1$ Umgänge um $x=a$ gemacht werden.*

In derselben Weise ist fortzufahren. *Man findet dadurch die oben genannten $\lambda\mu\nu$ Combinationen der Zweige in $\frac{\lambda\mu\nu}{R}$ Complexe zu je R unter einander zusammenhängenden Combinationen eingetheilt und erhält die Entwickelungen der zusammengehörigen Zweige der Combinationen jedes Complexes.*

In dem einzelnen Complex kann in den Entwickelungen der Zweige ein beliebiger Werth von $\log(x-a)$ in $e^{\frac{1}{R}\log(x-a)}=(x-a)^{\frac{1}{R}}$ gewählt werden, da durch Umgänge um $x=a$ immer wieder dieselben auf einander folgenden Combinationen der Zweige hervorgehen. Nach dem gewählten Werthe des Logarithmus bestimmt sich, wenn man einen bei $x=a$ gelegenen Punkt x_0 nimmt, in dem die α Werthe von u unter einander verschieden sind (entsprechend bei v und w), welchem dieser Werthe von u in x_0 eine Entwickelung angehört. (Vgl. No. 3 V.)

3.

Homogene lineare Differentialgleichungen.

Es sei nun eine homogene lineare Differentialgleichung vorgelegt, deren Coefficienten die in No. 1 angegebene Beschaffenheit haben; der Differentialausdruck sei durch $F_m(y, u, v, w, x)$ bezeichnet, wo m die Ordnung, x die unabhängige, y die abhängige Variable ist, u, v, w algebraische Functionen von x sind.

I. Bei dem singulären Punkte $x=a$ werde ein Complex von R zusammenhängenden Combinationen der Zweige von u, v, w, wie solche Complexe in No. 2 aufgestellt sind, herausgenommen. Die Entwickelungen der in den Combinationen zusammengehörigen Zweige von u, v, w sind in No. 2

angegeben und hängen von einer und derselben Grösse $(x-a)^{\frac{1}{R}} = \zeta$ ab. Wenn nun in dem Differentialausdrucke F_m $x-a = \zeta^R$ gesetzt wird und für den Complex der R Combinationen der Zweige die von ζ abhängenden in der Umgebung von $\zeta = 0$ einwerthigen Entwickelungen von u, v, w eingeführt werden, so ergiebt sich

$$(1.)\qquad F_m(y,\ u,\ v,\ w,\ x) = \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-m} G_m(y,\ u,\ v,\ w,\ \zeta),$$

wo G_m ein homogener linearer Differentialausdruck $m$ter Ordnung ist, der Coefficient der höchsten Ableitung in demselben gleich 1, die übrigen Coefficienten in der Umgebung von $\zeta = 0$ abgesehen von diesem Punkte einwerthige und stetige analytische Functionen von ζ sind, die für $\zeta = 0$ in endlicher Ordnung unendlich werden. Durch Einführung von $\zeta e^{\frac{2\pi i R'}{R}}$ für ζ in (1.) würde man von einer anderen der R Combinationen ausgehen. Der Kreis um einen singulären oder nicht singulären Punkt x_0 als Mittelpunkt, der durch den nächsten singulären Punkt von $F_m = 0$ geht, sei der ***Bezirk*** dieses Punktes x_0 genannt, wobei die Constructionsebene für x als einblättrige Fläche betrachtet ist. Wenn der Bezirk des singulären Punktes $x = a$ den Radius l hat, so convergiren die Potenzreihen, welche die Coefficienten von $\frac{d^\alpha y}{d\zeta^\alpha}$ $(\alpha = 0, \ldots, m-1)$ in G_m darstellen, (abgesehen von $\zeta = 0$) wenigstens in dem Kreise mit dem Radius $l^{\frac{1}{R}}$. Die Differentialgleichung $G_m = 0$ besitzt nun bei $\zeta = 0$ ein System von m linear unabhängigen Integralen von der allgemeinen durch Herrn *Fuchs* (Bd. 66 dieses Journals) gegebenen Gestalt. Das einzelne Integral in einem solchem Systeme hat eine der Formen

$$(2.)\qquad \begin{cases} \zeta^r \varphi(\zeta), \\ \zeta^r(\varphi_1(\zeta) + \varphi_2(\zeta)\log\zeta + \cdots + \varphi_\tau(\zeta)(\log\zeta)^{\tau-1}), \end{cases}$$

wo die Functionen φ Entwickelungen der Form $\sum_0^\infty c_\alpha \zeta^\alpha + \sum_{-1}^{-\infty} c_\alpha \zeta^\alpha$ haben, die wenigstens in dem Kreise um $\zeta = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius $l^{\frac{1}{R}}$ convergiren (die mit negativen Exponenten abgesehen von dem Punkte $\zeta = 0$). Wird in die Entwickelung einer Function φ für ζ die Grösse $(x-a)^{\frac{1}{R}}$ eingesetzt, so zerfällt dieselbe als Potenzreihe in einen Ausdruck der Form

$$(3.)\qquad \Phi(x-a) + \Phi_1(x-a)(x-a)^{\frac{1}{R}} + \cdots + \Phi_{R-1}(x-a)(x-a)^{\frac{R-1}{R}},$$

wo die Grössen Φ bis Φ_{R-1} Potenzreihen von $x-a$ mit ganzzahligen Exponenten sind, die wenigstens in dem Bezirke des Punktes $x=a$ convergiren (die mit negativen Exponenten abgesehen von $x=a$). Man hat

$$(4.)\qquad \log\zeta = \frac{1}{R}\log(x-a),\quad \zeta = (x-a)^{\frac{1}{R}} = e^{\frac{1}{R}\log(x-a)},\quad \zeta^r = e^{r\log\zeta}.$$

Wenn man nun in die m Integrale (2.) für ζ die Grösse $(x-a)^{\frac{1}{R}}$ einsetzt und in den Entwickelungen von u, v, w in (1.) übereinstimmend denselben Werth von ζ aus (4.) nimmt, so erhält man m Integrale von $F_m(y, u, v, w, x) = 0$. *Werden alsdann in diesen m Integralen successive* 0, 1 *bis* $R-1$ *Umgänge in positiver Richtung um $x=a$ vorgenommen, so erhält man für jede der R Combinationen der Zweige von u, v, w des Complexes ein System von m linear unabhängigen Integralen von $F_m(y, u, v, w, x) = 0$, deren Ausdrücke wenigstens in dem Bezirke des Punktes $x=a$ gelten. Diese Ausdrücke gehen aus* (2.), (3.), (4.) *hervor, wenn man dort und übereinstimmend in den von $(x-a)^{\frac{1}{R}}$ abhängenden Entwickelungen von u, v, w in* (1.) *für* $\frac{1}{R}\log(x-a)$ *setzt*

$$(5.)\qquad \frac{1}{R}\log(x-a)+\frac{R'}{R}2\pi i,\qquad (R'=0,\ldots,R-1)$$

II. Die den auf einander folgenden R Combinationen der Zweige in I. zugeordneten Integralsysteme von $F_m(y, u, v, w, x) = 0$ seien durch S_0, S_1 bis S_{R-1} bezeichnet. Dieselben sind so beschaffen, dass durch einen Umgang um $x=a$ in positiver Richtung S_0 in S_1, S_1 in S_2 etc. S_{R-2} in S_{R-1} übergeht. Nach R-maligem Umgange kommt man auf die ursprünglichen Coefficienten der Differentialgleichung zurück, daher geht S_{R-1} nach einmaligem Umgange in ein System über, welches homogen und linear mit constanten Coefficienten durch S_0 auszudrücken ist. Man erhält diese Ausdrücke, wenn man in dem Integralsysteme (2.) von $G_m(y, u, v, w, \zeta) = 0$ einen einmaligen Umgang in positiver Richtung um $\zeta = 0$ vornimmt und das Resultat durch die ursprünglichen Integrale von $G_m = 0$ ausdrückt. Bei dem Umgange um $x=a$ in negativer Richtung geht S_{R-1} in S_{R-2}, S_{R-2} in S_{R-3} etc. S_1 in S_0 über. S_0 geht in ein System über, welches linear und homogen mit constanten Coefficienten durch S_{R-1} auszudrücken ist. Man erhält diese Ausdrücke, wenn man in dem Integralsysteme (2.) von $G_m(y, u, v, w, \zeta) = 0$ einen einmaligen Umgang in negativer Richtung um

$\zeta=0$ vornimmt und das Resultat durch die ursprünglichen Integrale von $G_m=0$ ausdrückt.

III. Ein beliebiger Kreis in der einblättrigen x-Ebene, innerhalb dessen ausser $x=a$ kein singulärer Punkt liegt, sei durch C bezeichnet. Dem Gebiete dieser Werthe x in einer R-blättrigen Windungsfläche um a entspricht vermöge $(x-a)^{\frac{1}{R}}=\zeta$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet Z in der einblättrigen ζ-Ebene, innerhalb dessen der Punkt $\zeta=0$ liegt und welches durch Drehung um den Punkt $\zeta=0$ und um den Winkel $\frac{2\pi}{R}$ in sich selbst übergeht. Die Punkte ζ und $\zeta e^{\frac{2\pi i}{R}n}$, wo n eine beliebige ganze Zahl ist, gehören daher diesem Gebiete Z gleichzeitig an. Die algebraische Function u (No. 2) für die Werthe x auf einer λ-blättrigen Windungsfläche um a und in dem Kreise C ist eine einwerthige und stetige Function der Variablen $\eta=(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}$. In dem Gebiete von η bleibt die Grösse $\zeta^L=(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}$, während ζ in dem Gebiete Z bleibt; ebenso also die Grösse $\zeta^L e^{\frac{2\pi i}{R}nL}$. Wird daher für η gesetzt ζ^L oder $\zeta^L e^{\frac{2\pi i}{R}nL}$, so ist in beiden Fällen u als Function von ζ einwerthig und stetig in dem Gebiete Z. Entsprechend bei v und w. Demnach bleiben in diesem Gebiete abgesehen von $\zeta=0$ die Coefficienten von $G_m(y, u, v, w, \zeta)$ (1.) einwerthige und stetige analytische Functionen und werden für $\zeta=0$ in endlicher Ordnung unendlich. Daraus folgt für die Grössen φ in den Integralen (2.) von $G_m=0$ — in einer Gruppe von Integralen, in welchen sich die Exponenten nur um ganze Zahlen unterscheiden, folgt dieses successive vermittelst der linearen Relationen zwischen den Factoren der Logarithmenpotenzen —, dass diese Grössen φ in demselben Gebiete Z abgesehen von $\zeta=0$ einwerthige und stetige analytische Functionen sind.

Der Kreis C sei durch eine lineare Substitution für x, $x=f(\xi)$, conform auf den Kreis in der ξ-Ebene um den Nullpunkt als Mittelpunkt mit dem Radius 1 abgebildet, so dass dem Punkte $x=a$ der Punkt $\xi=0$, einem Punkte $x=b$ auf der Peripherie von C der Punkt $\xi=1$ entspricht. Diese lineare Substitution sei

$$(6.)\qquad x-a = \frac{A\xi}{1+B\xi}.$$

daher

$$(7.)\qquad (1+B\xi)\left(1-\frac{B}{A}(x-a)\right) = 1.$$

Dem Gebiete der Werthe x in dem Kreise C und in einer R-blättrigen Windungsfläche um a entspricht vermöge

$$(8.)\qquad (x-a)^{\frac{1}{R}} = \frac{A^{\frac{1}{R}}\xi^{\frac{1}{R}}}{(1+B\xi)^{\frac{1}{R}}},$$

wo die Constante $A^{\frac{1}{R}}$ einer der R Werthe dieser Wurzel, $(1+B\xi)^{\frac{1}{R}} = 1$ für $\xi = 0$, das Gebiet der Werthe ξ in dem Kreise um $\xi = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1 und in einer R-blättrigen Windungsfläche um $\xi = 0$. Wird

$$(9.)\qquad \xi^{\frac{1}{R}} = \zeta_1$$

gesetzt, wodurch man für ζ_1 das Gebiet in der einblättrigen ζ_1-Ebene in dem Kreise um den Punkt $\zeta_1 = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1 erhält, so entsprechen den Punkten dieses Gebietes wechselseitig eindeutig die Punkte des oben genannten Gebietes Z in der einblättrigen ζ-Ebene. Es ist

$$(10^{a}.)\qquad \zeta = \frac{A^{\frac{1}{R}}\zeta_1}{(1+B\zeta_1^R)^{\frac{1}{R}}},$$

$$(10^{b}.)\qquad \zeta_1 = \frac{\zeta}{A^{\frac{1}{R}}\left(1-\frac{B}{A}\zeta^R\right)^{\frac{1}{R}}}.$$

Die Grössen φ in (2.) sind demnach in dem Kreise um $\zeta_1 = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1, abgesehen von $\zeta_1 = 0$, einwerthige und stetige Functionen von ζ_1. Ferner ist

$$(11.)\qquad \log\zeta = \log\zeta_1 + \log(A^{\frac{1}{R}}) - \frac{1}{R}\log(1+B\zeta_1^R)$$

und hieraus

$$(12.)\qquad \zeta^r = e^{r\log\zeta} = \frac{A^{\frac{r}{R}}\zeta_1^r}{(1+B\zeta_1^R)^{\frac{r}{R}}}.$$

Die Ausdrücke (2.) gehen alsdann in solche der Form

$$(13.)\qquad \begin{cases} \zeta_1^r\psi(\zeta_1), \\ \zeta_1^r(\psi_1(\zeta_1)+\psi_2(\zeta_1)\log\zeta_1+\cdots+\psi_\tau(\zeta_1)(\log\zeta_1)^{\tau-1}) \end{cases}$$

über, wo die Functionen ψ in dem Kreise um $\zeta_1 = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1, abgesehen von $\zeta_1 = 0$, einwerthige und stetige analytische Functionen von ζ_1 sind. Wird für ζ_1 die Grösse $\xi^{\frac{1}{R}}$ in die Entwickelung einer Function ψ durch eine Potenzreihe eingesetzt, so zerfällt diese Entwickelung in eine solche der Form

$$(14.)\qquad \Psi(\xi)+\Psi_1(\xi)\xi^{\frac{1}{R}}+\cdots+\Psi_{R-1}(\xi)\xi^{\frac{R-1}{R}},$$

wo die Ψ nur Potenzen von ξ mit ganzzahligen Exponenten enthalten und diese Reihen in dem Kreise um $\xi = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1 (abgesehen von $\xi = 0$) convergiren.

Wird nun in (13.) und (14.) wieder x in dem Kreise C eingeführt, so bestimmt sich ξ aus (7.), $\xi^{\frac{1}{R}}$ aus (7.) und (8.), $\log\zeta_1$ und ζ_1^r aus (7.), (11.) und (12.), $\log\zeta$ und ζ^r aus (4.). *Wendet man nun die Substitutionen* (5.) *für* $\frac{1}{R}\log(x-a)$ *an, so ergiebt sich aus* (13.) *und* (14.) *die Darstellung der in* I. *genannten m Integrale von* $F_m(y, u, v, w, x) = 0$ *für jede der R Combinationen des Complexes in dem Gebiete von x innerhalb des Kreises C.*

In die Ausdrücke (13.) sei für ζ_1 wieder ξ gemäss (9.) eingeführt. Es ist

$$(15.)\qquad \log\zeta_1 = \frac{1}{R}\log\xi,\quad \zeta_1 = e^{\frac{1}{R}\log\xi},\quad \zeta_1^r = e^{r\log\zeta_1},$$

die Grösse $\frac{1}{R}\log\xi$ bestimmt sich aus (11.) und (4.). Den Ausdrücken (5.) entsprechen gemäss (11.) die Ausdrücke

$$(16.)\qquad \frac{1}{R}\log\xi+\frac{R'}{R}2\pi i. \qquad (R' = 0, \ldots, R-1)$$

Setzt man letztere Ausdrücke in die Entwickelungen an Stelle von $\frac{1}{R}\log\xi$ ein und nimmt den Werth von R' mit dem in (5.) übereinstimmend, so erhält man aus (13.) und (14.) für jede der R Combinationen *die Darstellung der m vorhin genannten Integrale von* ξ *abhängig in dem Kreise um* $\xi = 0$ *als Mittelpunkt mit dem Radius* 1. Nun seien bei dem Punkte $x = b$ auf der Peripherie des Kreises C, der in der linearen Substitution (6.) dem Punkte $\xi = 1$ entspricht, ebenfalls die Integrale von $F_m(y, u, v, w, x) = 0$ aufgestellt. Dann sei durch die lineare Substitution (6.) in gleicher Weise, wie vorhin, für $x-b$ die Grösse $\xi-1$ in die Darstellung der Integrale ein-

geführt. Diese von $\xi-1$ abhängige Darstellung der Integrale *gilt in dem Kreise um* $\xi=1$ *als Mittelpunkt, welcher durch den dem Punkte* $\xi=1$ *zunächst gelegenen der Punkte* ξ *hindurchgeht, die vermöge der linearen Substitution* (6.) *den in No. 1 fixirten singulären Punkten* x *in* $F_m=0$ *entsprechen.* Diese beiden Kreise in der ξ-Ebene haben *ein Gebiet gemeinschaftlich, innerhalb welches die bezüglichen Entwickelungen bestehen.* Diesem gemeinschaftlichen Gebiete entspricht ein gewisses Gebiet von x. Ein bei $x=a$ aufgestelltes Integral von $F_m=0$, in letzterem Gebiete betrachtet, gehört dort einem der in No. 1 genannten, durch Combination der Zweige von u, v, w hervorgehenden $\alpha\beta\gamma$ Bereiche an und wird durch eine homogene lineare Verbindung mit constanten Coefficienten der in diesem Bereiche geltenden bei $x=b$ aufgestellten Integrale ausgedrückt. Diese lineare Verbindung, die in einem Gebiete von x besteht, gilt in dem entsprechenden Gebiete von ξ. Um die m Constanten zu bestimmen, wird dann die lineare Relation $(m-1)$-mal nach ξ differentiirt und das System von m linearen Gleichungen nach den Constanten aufgelöst. Einer der beiden Punkte a und b, oder beide, können auch nichtsinguläre Punkte sein. Wenn dann der Kreis C so gewählt ist, dass auf der Peripherie überhaupt kein singulärer Punkt liegt, so convergiren die Entwickelungen der bei $x=a$ aufgestellten Integrale, nachdem die Grösse ξ eingeführt ist, über den Kreis um $\xi=0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1 hinaus, und die Bestimmung der Constanten kann in dem Punkte $\xi=1$ selbst vorgenommen werden.

IV. Bei $x=\infty$ wird $x=\frac{1}{t}$ gesetzt;

$$F_m(y,\ u,\ v,\ w,\ x) \;=\; (-t^2)^m F'_m(y,\ u,\ v,\ w,\ t).$$

Wenn die höchste Potenz von x in der Gleichung von u die $h$te, in der von v die $k$te, in der von w die $l$te ist, so bleibt $t^h u=u'$, $t^k v=v'$, $t^l w=w'$ endlich bei $t=0$. Dann tritt, wenn u', v', w' eingeführt sind, dieselbe Behandlung wie in I. bei dem Punkte im Endlichen ein. In den Entwickelungen der Integrale ist dann für t wieder $\frac{1}{x}$ zu setzen. Diese Entwickelungen gelten in *dem Bezirke von* $x=\infty$, nämlich in dem Gebiete ausserhalb des Kreises um $x=0$ als Mittelpunkt durch den entferntesten im Endlichen liegenden singulären Punkt.

Um ein Integral bei $x=\infty$ mit den Integralen desselben Bereiches (No. 1) bei einem Punkte x_0 im Endlichen, oder umgekehrt eines der

letzteren Integrale mit denen bei $x = \infty$ unter Anwendung des Verfahrens in III. in Zusammenhang zu bringen, sei der Punkt x_0 ausserhalb eines Kreises gelegen, innerhalb dessen alle übrigen singulären Punkte im Endlichen sich befinden. Wenn innerhalb dieses Kreises der Nullpunkt liegt, und $x = \frac{1}{t}$ gesetzt wird, so liegen die Punkte $t = \frac{1}{\infty}$ und $t = \frac{1}{x_0}$ innerhalb eines Kreises, ausserhalb dessen die Punkte t sich befinden, die den übrigen singulären Punkten x entsprechen. Wird jetzt in III. t an Stelle von x gesetzt, so sind die dortigen Betrachtungen anwendbar. Der Punkt $t = 0$ kann zum dortigen Punkte a, der Punkt $t = \frac{1}{x_0}$ zum Punkte b genommen werden, oder der Punkt $t = \frac{1}{x_0}$ zum dortigen Punkte a, der Punkt $t = 0$ zum Punkte b. Im ersten Falle wird die lineare Substitution $t = f(\xi)$ auf die von t abhängenden Entwickelungen bei $t = 0$ angewandt und die Substitution $\frac{1}{x} = f(\xi)$ auf die von x abhängenden Entwickelungen bei x_0. Im zweiten Falle wird die lineare Substitution $\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = f(\xi)$ auf die von x abhängenden Entwickelungen bei x_0 angewandt und die Substitution $t - \frac{1}{x_0} = f(\xi)$ auf die von t abhängenden Entwickelungen bei $t = 0$. Wenn innerhalb des vorhin genannten Kreises der Nullpunkt nicht liegt, so ist $x = c + \frac{1}{t'}$ zu setzen, wo c ein Punkt innerhalb dieses Kreises, $\frac{1}{t} = c + \frac{1}{t'}$, für t' tritt die frühere lineare Substitution ein, woraus sich für x und t lineare Substitutionen ergeben, die auf das frühere Verfahren zurückführen.

V. Durch die singulären Punkte sei eine in sich zurücklaufende, sich selbst nicht schneidende Linie gezogen. Dann sei in einem der beiden dadurch erhaltenen Gebiete von x, in jedem der durch Combination der α Zweige von u, der β Zweige von v, der γ Zweige von w erhaltenen $\alpha\beta\gamma$ Bereiche, ein Integralsystem von $F_m(y, u, v, w, x) = 0$ von der in I. angegebenen Beschaffenheit aufgestellt, wobei in jedem einzelnen Complex in den Entwickelungen der Zweige und übereinstimmend in dem Ausdrucke der den Combinationen des Complexes zugehörigen Integrale der Logarithmus fixirt wird (vgl. No. 2 Schluss). Nun seien die in II. angegebenen Substitutionen für den Umgang in positiver und negativer Richtung bestimmt. Um die Substitutionen für den Uebergang in jedem der $\alpha\beta\gamma$ Bereiche von

einem singulären Punkte zu einem anderen zu ermitteln, werde das Verfahren in III. zu Grunde gelegt, wobei nichtsinguläre Punkte, zu denen die Uebergänge gemacht werden, eingeschoben werden können. Der Uebergang von einem bei einem nichtsingulären Punkte aufgestellten Integralsysteme zu dem nächsten singulären Punkte und umgekehrt geschieht auf dieselbe Weise. Durch Zusammensetzung dieser Substitutionen ergiebt sich dann das Resultat der Fortsetzung der Integrale von einem Punkte aus auf irgend einem Wege zu einem anderen Punkte.

4.

Nichthomogene lineare Differentialgleichungen.

Die nichthomogene lineare Differentialgleichung

$$(1.)\qquad F_m(y,\ u,\ v,\ w,\ x) = q$$

sei zu behandeln, wo der homogene lineare Differentialausdruck $F_m(y, u, v, w, x)$ der in der vorigen Nummer angegebene ist, der zweite Theil q diejenige Beschaffenheit haben soll, die in der Abhandlung des Verfassers Bd. 107 dieses Journals über nichthomogene lineare Differentialgleichungen vorausgesetzt ist. Die singulären Punkte (No. 1) sind ausser denen in $F_m = 0$ diejenigen, die von dem zweiten Theile q herrühren und in der genannten Abhandlung No. 1 angegeben sind. Dieselben treten in endlicher Anzahl auf. Der *Bezirk* eines singulären oder nichtsingulären Punktes x_0 ist der Kreis in der einblättrigen x-Ebene um x_0 als Mittelpunkt durch den nächsten singulären Punkt. Der Bezirk des Punktes $x = \infty$ ist das Gebiet ausserhalb des Kreises um $x = 0$ als Mittelpunkt durch den entferntesten im Endlichen liegenden singulären Punkt. Nach den über die Grösse q l. c. gemachten Voraussetzungen stellt sich diese Grösse bei dem einzelnen (singulären oder nichtsingulären) Punkte als homogene lineare Verbindung mit constanten Coefficienten von linear unabhängigen Ausdrücken q_1 bis q_ϱ dar, von denen der einzelne Ausdruck die Form eines Integrales hat, welches bei einem singulären Punkt einer homogenen linearen Differentialgleichung mit in der Umgebung dieses Punktes einwerthigen Coefficienten entwickelt ist, und bei welchem die Exponenten in der Entwickelung sich nur um ganze Zahlen unterscheiden. Daher sind die einzelnen Differentialgleichungen $F_m = q_1$ bis $F_m = q_\varrho$ zu betrachten. Durch die singulären Punkte sei eine in sich zurücklaufende, sich selbst nicht schneidende Linie gezogen, dann

ist in einem der beiden hierdurch hervorgehenden Gebiete von x und für *jeden* der durch Combination der α Zweige von u, der β Zweige von v, der γ Zweige von w *entstehenden* $\alpha\beta\gamma$ *Bereiche, während* q_a *eine und dieselbe Grösse bleibt,* bei dem einzelnen singulären Punkte ein Integral der Differentialgleichung $F_m = q_a$ $(a = 1, \dots, \varrho)$ aufzustellen. Wird zu diesem Integral das vollständige Integral von $F_m = 0$ bei diesem Punkte addirt, so ergiebt sich das vollständige Integral von $F_m = q_a$ bei demselben Punkte. Bei der Fortsetzung der Integrale von einem Punkte zu irgend einem anderen geht die Grösse q_a bei dem einen Punkte in einen Ausdruck $c_1 q_1 + \dots + c_\varrho q_\varrho$ über, wo die Grössen q sich auf den anderen Punkt beziehen, die c bekannte Constanten sind, und ein Integral der Differentialgleichung $F_m = q_a$ bei dem einen Punkte in ein solches der Differentialgleichung $F_m = c_1 q_1 + \dots + c_\varrho q_\varrho$ bei dem anderen Punkte über, deren vollständiges Integral bei diesem Punkte alsdann bekannt ist.

I. Wie in No. 3 I. sei bei dem singulären Punkte $x = a$ ein Complex von R zusammenhängenden Combinationen der Zweige von u, v, w herausgenommen, alsdann $x - a = \zeta^R$ in die Differentialgleichung eingeführt. Es wird gemäss No. 3 (1.)

$$(2.)\qquad F_m(y,\ u,\ v,\ w,\ x) = \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-m} G_m(y,\ u,\ v,\ w,\ \zeta).$$

Der zweite Theil q_a $(a = 1, \dots, \varrho)$ ist ein Ausdruck der Form

$$(3.)\qquad (x-a)^\sigma f(x-a,\ \log(x-a)),$$

wo f eine ganze rationale Function in Bezug auf $\log(x-a)$ mit Coefficienten, die durch Potenzreihen in Bezug auf $x-a$ mit ganzzahligen Exponenten darstellbar sind. Hier ist $(x-a)^\sigma = e^{\sigma \log(x-a)}$, alsdann $\log(x-a)$ in q_a (3.) in Uebereinstimmung gebracht mit $\log(x-a)$ in No. 3 (4.) in den Entwickelungen von u, v, w, die in No. 3 (1.) enthalten sind. Durch Einführung von $\frac{1}{R}\log(x-a) = \log\zeta$, $x - a = \zeta^R$ wird (3.)

$$(4.)\qquad \zeta^{\sigma R} f(\zeta^R,\ R\log\zeta),$$

und es ist die nichthomogene Differentialgleichung zu behandeln

$$(5.)\qquad G_m(y,\ u,\ v,\ w,\ \zeta) = \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^m \zeta^{\sigma R} f(\zeta^R,\ R\log\zeta).$$

Ein Integral dieser Differentialgleichung sei ermittelt (vgl. No. 7). Dasselbe soll die Form der Ausdrücke No. 3 (2.) haben, wo alsdann die Exponenten in den Entwickelungen sich von σR nur um ganze Zahlen unterscheiden

können. Diese Entwickelungen gelten in dem Kreise um $\zeta = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius $l^{\frac{1}{R}}$, wenn l der Radius des Bezirkes von $x = a$ in der Differentialgleichung $F_m = q$ ist. Wird nun für $\log\zeta$ wieder $\frac{1}{R}\log(x-a)$, $\zeta = (x-a)^{\frac{1}{R}}$ gesetzt, so erhält man ein Integral von $F_m(y, u, v, w) = q_\alpha$, welches in dem genannten Bezirke von $x = a$ gilt. Ein solches Integral sei für jede der Differentialgleichungen $F_m = q_\alpha$ $(\alpha = 1, \dots, \varrho)$ aufgestellt und durch y_α $(\alpha = 1, \dots, \varrho)$ bezeichnet. Die hier in Betracht kommenden Grössen q_α sind so beschaffen, dass diejenigen, deren Exponenten sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, durch einen Umgang um $x = a$ in eine homogene lineare Verbindung mit constanten Coefficienten derselben Grössen übergehen. Eine solche Gruppe werde durch q_1 bis q_s gebildet. Durch R'-maligen Umgang um $x = a$ in positiver Richtung gehe q_n $(n = 1 \dots s)$ über in

$$(6.) \qquad c_{n1}^{(R')} q_1 + c_{n2}^{(R')} q_2 + \dots + c_{ns}^{(R')} q_s,$$

durch R'-maligen Umgang in negativer Richtung in

$$(7.) \qquad c_{n1}^{(-R')} q_1 + c_{n2}^{(-R')} q_2 + \dots + c_{ns}^{(-R')} q_s.$$

Der Ausdruck

$$(8.) \qquad c_{n1}^{(-R')} y_1 + c_{n2}^{(-R')} y_2 + \dots + c_{ns}^{(-R')} y_s$$

erfüllt die Differentialgleichung

$$(9.) \qquad F_m(y,\ u,\ v,\ w,\ x) = c_{n1}^{(-R')} q_1 + \dots + c_{ns}^{(-R')} q_s.$$

Hier wird nun ein R'-maliger Umgang um $x = a$ in positiver Richtung vorgenommen. Das Resultat in y_n werde durch $y_n^{(R')}$ bezeichnet, das Resultat in $F_m(y, u, v\ w, x)$, wobei u, v, w in Betracht kommen, durch $F_m(y, u, v, w, x)_{R'}$. Diese Resultate gehen hervor, indem in den Entwickelungen von y_n, u, v, w an Stelle von $\log(x-a)$ tritt $\log(x-a) + R'2\pi i$. Alsdann ergiebt sich aus (8.) und (9.), *dass der Ausdruck*

$$(10.) \qquad c_{n1}^{(-R')} y_1^{(R')} + c_{n2}^{(-R')} y_2^{(R')} + \dots + c_{ns}^{(-R')} y_s^{(R')} = T_{nR'}, \qquad (n = 1, \dots, s)$$

die Differentialgleichung

$$(11.) \qquad F_m(y,\ u,\ v,\ w,\ x)_{R'} = q_n$$

befriedigt, wo $F_m(y, u, v, w, x)_{R'}$ $(R' = 0, \dots, R-1)$ *die Bedeutung hat, dass in* $F_m(y, u, v, w, x)$ (2.) *die auf einander folgenden* R *Combinationen der Zweige des Complexes gesetzt sind,* da diese durch den R'-maligen Umgang um $x = a$ für $R' = 0$ bis $R-1$ erhalten werden. Für $R' = 0$ fällt der Ausdruck (10.) mit y_n zusammen.

II. In den Integralen (10.) $T_{nR'}$ $(R' = 0, \ldots, R-1)$ soll der *Umgang um $x = a$ in positiver Richtung* gemacht werden. Es geht $T_{nR'}$ über in

$$(12.) \qquad c_{n1}^{(-R')} y_1^{(R'+1)} + c_{n2}^{(-R')} y_2^{(R'+1)} + \cdots + c_{ns}^{(-R')} y_s^{(R'+1)}.$$

Dieser Ausdruck ist, da

$$(13.) \qquad c_{n\lambda}^{(-R')} = c_{n1}^{(1)} c_{1\lambda}^{(-R'-1)} + c_{n2}^{(1)} c_{2\lambda}^{(-R'-1)} + \cdots + c_{ns}^{(1)} c_{s\lambda}^{(-R'-1)}$$

gleich

$$(14.) \qquad c_{n1}^{(1)} T_{1,R'+1} + c_{n2}^{(1)} T_{2,R'+1} + \cdots + c_{ns}^{(1)} T_{s,R'+1}$$

und *ergiebt das Resultat des Umganges in $T_{nR'}$ für $R' = 0$ bis $R-2$. Für $R' = R-1$* sind in (12.) die Grössen $y_1^{(R)}$ bis $y_s^{(R)}$ durch die Integrale von $F_m(y, u, v, w, x) = q_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, s)$ auszudrücken. Nun ist

$$(15.) \qquad y_\alpha^{(R)} = c_{\alpha 1}^{(R)} y_1 + c_{\alpha 2}^{(R)} y_2 + \cdots + c_{\alpha s}^{(R)} y_s + \omega_\alpha,$$

wo ω_α ein homogener linearer Ausdruck mit constanten Coefficienten der Integrale von $F_m = 0$ ist. Man erhält den Ausdruck (15.) und damit ω_α, wenn man in y_α, welches von ζ abhängt, einen einmaligen Umgang in positiver Richtung um $\zeta = 0$ macht. Da nun $y_n = T_{n0}$ und

$$(16.) \qquad c_{n\lambda}^{(1)} = c_{n1}^{(-R+1)} c_{1\lambda}^{(R)} + c_{n2}^{(-R+1)} c_{2\lambda}^{(R)} + \cdots + c_{ns}^{(-R+1)} c_{s\lambda}^{(R)},$$

so ergiebt sich, *dass $T_{n,R-1}$ durch einen positiven Umgang übergeht in*

$$(17.) \qquad c_{n1}^{(1)} T_{10} + c_{n2}^{(1)} T_{20} + \cdots + c_{ns}^{(1)} T_{s0} + c_{n1}^{(-R+1)} \omega_1 + \cdots + c_{ns}^{(-R+1)} \omega_s.$$

In gleicher Weise findet man für *den Umgang um $x = a$ in negativer Richtung*, unter Hinzuziehung der Relation

$$(18.) \qquad c_{n\lambda}^{(-R')} = c_{n1}^{(-1)} c_{1\lambda}^{(-R'+1)} + c_{n2}^{(-1)} c_{2\lambda}^{(-R'+1)} + \cdots + c_{ns}^{(-1)} c_{s\lambda}^{(-R'+1)},$$

dass $T_{nR'}$ $(R' = 1, \ldots, R-1)$ übergeht in

$$(19.) \qquad c_{n1}^{(-1)} T_{1,R'-1} + c_{n2}^{(-1)} T_{2,R'-1} + \cdots + c_{ns}^{(-1)} T_{s,R'-1}.$$

Um in T_{n0} d. h. in y_n den Umgang um $x = a$ in negativer Richtung zu machen, wird zunächst in y_n ein R-maliger Umgang in negativer Richtung vorgenommen, wodurch sich ergiebt

$$(20.) \qquad c_{n1}^{(-R)} y_1 + c_{n2}^{(-R)} y_2 + \cdots + c_{ns}^{(-R)} y_s + \omega'_n,$$

wo ω'_n eine homogene lineare Verbindung mit constanten Coefficienten der Integrale von $F_m = 0$ ist. Man erhält den Ausdruck (20.) und damit ω'_n, wenn man in y_n, welches von ζ abhängt, einen einmaligen Umgang in negativer Richtung um $\zeta = 0$ macht. Wird nun in (20.) ein $R-1$-maliger Umgang um $x = a$ in positiver Richtung vorgenommen, so geht ω'_n in eine, dieselben constanten Coefficienten enthaltende, lineare Verbindung der in Nr. 3 I. aufgestellten

Integrale von $F_m(y, u, v, w, x)_{R-1} = 0$ über, dieselbe werde durch $\omega_n'^{(R-1)}$ bezeichnet, y_α geht in $y_\alpha^{(R-1)}$ über, das Resultat *ist der einmalige Umgang von y_n in negativer Richtung* und wird, unter Benutzung der Relation

$$(21.)\qquad c_{n\lambda}^{(-R)} = c_{n1}^{(-1)} c_{1\lambda}^{(-R+1)} + c_{n2}^{(-1)} c_{2\lambda}^{(-R+1)} + \cdots + c_{ns}^{(-1)} c_{s\lambda}^{(-R+1)}$$

gleich

$$(22.)\qquad c_{n1}^{(-1)} T_{1,R-1} + c_{n2}^{(-1)} T_{2,R-1} + \cdots + c_{ns}^{(-1)} T_{s,R-1} + \omega_n'^{(R-1)}.$$

III. In die in I. aufgestellten Integrale y_1 bis y_ϱ wird statt x als unabhängige Variable ξ aus No. 3 III. unter Wiederholung der dort gemachten Betrachtungen eingeführt. Man erhält dadurch die Darstellung dieser Integrale als von x abhängig in dem Gebiete des l. c. durch C bezeichneten, hier auf $F_m = q$ sich beziehenden Kreises und die Darstellung der Integrale als von ξ abhängig in dem Gebiete des Kreises um $\xi = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1; ebenso erfolgt dem in No. 3 III. Gesagten entsprechend die Darstellung von Integralen, die von $\xi - 1$ abhängig sind, in dem Kreise um $\xi = 1$ als Mittelpunkt mit dem l. c. angegebenen, hier auf $F_m = q$ sich beziehenden Radius. Und zwar gilt dieses Alles zugleich von den aus einem Integrale y durch R'-maligen Umgang um $x = a$ hervorgehenden Ausdrücken, die in I. durch $y^{(R')}$ bezeichnet sind. Daraus folgt, dass das Vorstehende auch in Bezug auf die in I. aufgestellten Integrale $T_{nR'}$ stattfindet, welche den R Combinationen des Complexes entsprechen. Um den Zusammenhang zwischen den bei $\xi = 0$ und $\xi = 1$ aufgestellten Integralen auszudrücken, werden die m unbekannten constanten Factoren der eingehenden Integrale von $F_m = 0$ in derselben Weise wie in No. 3 III. angegeben ist, bestimmt. In Bezug auf die Integrale der Differentialgleichung $F_m = q$ bei $x = \infty$, $x = \frac{1}{t}$, $t = 0$ gilt gleichfalls das in No. 3 IV. Gesagte. Alsdann erfolgt die Fortsetzung der Integrale von einem Punkte zu einem anderen, die bereits im Anfang dieser Nummer besprochen worden ist, unter Aufstellung derjenigen Substitutionen, die in No. 3 V. angegeben sind.

(Fortsetzung folgt.)

Ueber den *Eisenstein*schen Satz von der Irreductibilität algebraischer Gleichungen.

(Von Herrn *Leo Königsberger* in Heidelberg.)

Die Beurtheilung der Irreductibilität einer algebraischen Gleichung ist von *Kronecker* auf die Ausführung einer endlichen Anzahl von Operationen zurückgeführt worden, und damit wenigstens die Möglichkeit gegeben, die Irreductibilität festzustellen, wenn auch in der Mehrzahl der Fälle das Verfahren meist unausführbar sein wird, und auch nur für ganz specielle Gleichungen werden die von den Herren *Runge* und *Mandl* gegebenen Abänderungen jenes Verfahrens leichter ausführbar sein. Wir besitzen bis heute nur in dem *Eisenstein*schen Satze ein Theorem, welches uns durch den blossen Anblick der Coefficienten der Gleichungen für eine umfassende Klasse derselben die Irreductibilität erkennen lässt und so die Möglichkeit bot, ohne jede Rechnung die Irreductibilität der Kreis- und Lemniscatentheilungsgleichungen festzustellen. Dasselbe lautet im wesentlichen folgendermassen: *Wenn in einer ganzzahligen algebraischen Gleichung*

$$(1.)\qquad a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n = 0$$

alle Coefficienten mit Ausnahme des ersten durch eine Primzahl p, der letzte aber nicht durch p^2 theilbar ist, so ist die Gleichung irreductibel.

Um zu sehen, welche Stellung dieser Satz zu etwa noch aufzustellenden andern, weitergehenden Irreductibilitätskriterien algebraischer Gleichungen einnimmt, ist es nöthig, die zum Beweise dieses Satzes unmittelbar sich darbietenden Schlüsse auf algebraische Functionen zu übertragen, welche durch die Gleichung definirt sein mögen

$$(2.)\qquad \varphi_0(x)y^n+\varphi_1(x)y^{n-1}+\varphi_2(x)y^{n-2}+\cdots+\varphi_{n-1}(x)y+\varphi_n(x) = 0,$$

in welcher $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ ganze Functionen von x bedeuten, und wir werden so zu Ergebnissen geführt werden, die dem Kreise der von *Kronecker*, *Dedekind* und *Weber* angestellten Untersuchungen angehören,

welche die Analogie zwischen algebraischen Functionen und algebraischen Zahlen zum Gegenstande haben. Zunächst ist nach Analogie des Satzes von der ganzzahligen Zerlegbarkeit reductibler ganzzahliger Polynome leicht zu sehen, dass, wenn das Polynom der linken Seite der Gleichung (2.) die Zerlegung in ganze Polynome von y mit in x rationalen Coefficienten in der Form zulässt

$$(3.)\quad \begin{cases} \varphi_0(x)y^n+\varphi_1(x)y^{n-1}+\cdots+\varphi_n(x) \\ = (f_0(x)y^\mu+f_1(x)y^{\mu-1}+\cdots+f_\mu(x))(F_0(x)y^\nu+F_1(x)y^{\nu-1}+\cdots+F_\nu(x)), \end{cases}$$

worin $f_0(x)$, ..., $f_\mu(x)$, $F_0(x)$, ..., $F_\nu(x)$ rationale Functionen von x bedeuten, oder, wenn $f(x)$ und $F(x)$ die kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Nenner der Functionen $f_0(x)$, ..., $f_\mu(x)$, resp. $F_0(x)$, ..., $F_\nu(x)$ darstellen, in

$$\varphi_0(x)y^n+\varphi_1(x)y^{n-1}+\cdots+\varphi_n(x)$$
$$= \frac{\psi_0(x)y^\mu+\psi_1(x)y^{\mu-1}+\cdots+\psi_\mu(x)}{f(x)}\cdot\frac{\chi_0(x)y^\nu+\chi_1(x)y^{\nu-1}+\cdots+\chi_\nu(x)}{F(x)},$$

worin $\psi_0(x)$, ..., $\chi_0(x)$, ... ganze Functionen bedeuten, welche mit $f(x)$ resp. $F(x)$ keine gemeinsamen Factoren besitzen, für jeden Theiler $\omega(x)$ von $f(x)$ die Gleichung (3.) in die Form gesetzt werden kann*)

$$(4.)\quad \begin{cases} \varphi_0(x)y^n+\varphi_1(x)y^{n-1}+\cdots+\varphi_n(x) \\ \qquad = \dfrac{\omega(x)G_0(x,y)+G_1(x,y)}{f(x)}\cdot\dfrac{\omega(x)H_0(x,y)+H_1(x,y)}{F(x)} \\ \qquad = \dfrac{\omega^2(x)G_0H_0+\omega(x)(G_0H_1+H_0G_1)+G_1H_1}{f(x)F(x)}, \end{cases}$$

worin die ganze Function $G_1(x,y)$ von x und y nicht durch $\omega(x)$ theilbar ist; da aber vermöge der Identität (4.) $\omega(x)$ als Theiler des Nenners auch im Zähler, daher in G_1H_1 und somit auch in H_1 enthalten sein muss, so ergiebt sich, dass $\chi_0(x)$, $\chi_1(x)$, ..., $\chi_\nu(x)$ durch $f(x)$ und ebenso $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, ..., $\psi_\mu(x)$ durch $F(x)$ theilbar sind, und die Gleichung (3.) somit in die Form gesetzt werden kann:

$$\varphi_0(x)y^n+\varphi_1(x)y^{n-1}+\cdots+\varphi_n(x) = \left[\frac{\psi_0(x)}{F(x)}y^\mu+\frac{\psi_1(x)}{F(x)}y^{\mu-1}+\cdots+\frac{\psi_\mu(x)}{F(x)}\right]\cdot$$
$$\times\left[\frac{\chi_0(x)}{f(x)}y^\nu+\frac{\chi_1(x)}{f(x)}y^{\nu-1}+\cdots+\frac{\chi_\nu(x)}{f(x)}\right],$$

*) Wir beweisen den obenstehenden bekannten Satz aus später erkennbaren Gründen absichtlich auf rein algebraischem Wege, ohne denselben, wie es leicht möglich ist, aus dem Unendlichwerden der auf der rechten Seite von (3.) befindlichen Functionen von x herzuleiten.

worin die Coefficienten der Potenzen von y ganze Functionen von x sind, und somit der Satz besteht

dass, wenn eine ganze Function $\varphi(x, y)$ von x und y in zwei in y ganze, in x rationale Factoren $\psi(x, y)$ und $\chi(x, y)$ zerlegbar ist, diese Zerlegung sich auch durch in x und y ganze Polynome bewerkstelligen lässt, indem man

$$\varphi(x, y) = \frac{f(x)}{F(x)}\psi(x, y)\cdot\frac{F(x)}{f(x)}\chi(x, y)$$

setzt, worin $f(x)$ und $F(x)$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner der Coefficienten der Polynome $\psi(x, y)$, resp. $\chi(x, y)$ sind.

Mit Hülfe dieses Satzes von der Eigenschaft der Zerlegung reductibler ganzer Functionen von zwei Variablen wird sich nun das folgende, dem *Eisenstein*schen Satze analoge Theorem leicht erweisen lassen:

Wenn in einer algebraischen Gleichung

$$f_0(x)y^n+f_1(x)y^{n-1}+\cdots+f_{n-1}(x)y+f_n(x) = 0, \tag{5.}$$

in welcher $f_0(x)$, $f_1(x)$, ..., $f_n(x)$ ganze Functionen von x bedeuten, alle Coefficienten mit Ausnahme des ersten durch einen Linearfactor $x-\alpha$, der letzte aber nicht durch $(x-\alpha)^2$ theilbar ist, so ist die Gleichung irreductibel.

Wäre nämlich das Polynom der Gleichung (5.) zerlegbar, so dass

$$\text{(6.)}\quad \begin{cases} f_0(x)y^n+f_1(x)y^{n-1}+\cdots+f_n(x) \\ = (\varphi_0(x)y^\mu+\varphi_1(x)y^{\mu-1}+\cdots+\varphi_\mu(x))(\psi_0(x)y^\nu+\psi_1(x)y^{\nu-1}+\cdots+\psi_\nu(x)) \end{cases}$$

ist, worin nach dem oben bewiesenen Hülfsatze $\varphi_0(x)$, ..., $\varphi_\mu(x)$, $\psi_0(x)$, ..., $\psi_\nu(x)$ als ganze Functionen von x betrachtet werden dürfen, so würde aus

$$\varphi_\mu(x).\psi_\nu(x) = f_n(x)$$

nach der gemachten Annahme folgen, dass der Factor $x-\alpha$ in $\varphi_\mu(x)$ oder in $\psi_\nu(x)$, aber nur in einer von diesen beiden Functionen z. B. in $\psi_\nu(x)$ enthalten sein wird; die Multiplication von $\psi_\nu(x)$ mit dem Polynome $\varphi_0(x)y^\mu+\cdots+\varphi_\mu(x)$ liefert also als Coefficienten der y-Potenzen nur solche Functionen von x, welche $x-\alpha$ als Theiler haben, die also von dem Polyome der linken Seite von (6.) weggenommen den Charakter des Restes, dass alle seine Coefficienten mit Ausnahme des ersten durch $x-\alpha$ theilbar sind, nicht ändern. Daher muss also $\varphi_\mu(x).\psi_{\nu-1}(x)$ als alleiniger Coefficient von y auf der rechten Seite von (6.) also der Annahme gemäss auch $\psi_{\nu-1}(x)$ durch $x-\alpha$ theilbar sein; schliesst man so weiter, so enthielte endlich auch $\varphi_\mu(x)\psi_0(x)$

also $\psi_0(x)$ den Factor $x-\alpha$, was unmöglich ist, da

$$\varphi_0(x)\psi_0(x) = f_0(x)$$

durch $x-\alpha$ nicht theilbar sein sollte, und es wäre somit der obige, dem *Eisenstein*schen Satze für Zahlengleichungen genau analoge Satz bewiesen, den wir auch so aussprechen können:

Jede algebraische Gleichung der Form

$$(7.)\quad \begin{cases} F_0(x)y^n+(x-\alpha)F_1(x)y^{n-1}+(x-\alpha)F_2(x)y^{n-2}+\cdots \\ \qquad\cdots+(x-\alpha)F_{n-1}(x)y+(x-\alpha)F_n(x) = 0, \end{cases}$$

in welcher $F_n(\alpha)$ und $F_0(\alpha)$ von Null verschieden sind, ist irreductibel.

Es wird nun für die folgenden Betrachtungen wesentlich sein, diesen Satz functionentheoretisch zu untersuchen, indem wir uns die Frage nach der Verzweigung der *Riemann*schen Fläche der durch die Gleichung (7.) definirten algebraischen Function im Punkte α vorlegen*).

Setzt man die Gleichung (7.), welche für $x=\alpha$ n verschwindende Lösungen für y liefert, in die Form

$$(8.)\quad \begin{cases} (a_0+a_1(x-\alpha)+\cdots)y^n+(b_1(x-\alpha)+\cdots)y^{n-1}+\cdots \\ \qquad\cdots+(\mu_1(x-\alpha)+\cdots)y+(\nu_1(x-\alpha)+\cdots) = 0, \end{cases}$$

in welcher a_0 und ν_1 von Null verschieden sind, und substituirt in dieselbe

$$(9.)\quad \frac{x-\alpha}{y} = v,$$

so geht die Gleichung (8.) nach Potenzen von y und v geordnet in

$$(10.)\quad f(y,v)=0=\nu_1 v+\mu_1 yv+(\lambda_1 y^2 v+\nu_2 y v^2)+\cdots+(a_0 y^{n-1}+c_1 y^{n-2}v+\cdots)+\cdots$$

über, und da für $y=0$ sich die einfache Lösung $v=0$ ergiebt, ferner

$$\left(\frac{\partial f(y,v)}{\partial y}\right)_0=\left(\frac{\partial^2 f(y,v)}{\partial y^2}\right)_0=\cdots=\left(\frac{\partial^{n-2} f(y,v)}{\partial y^{n-2}}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial^{n-1} f(y,v)}{\partial y^{n-1}}\right)_0=(n-1)!a_0$$

ist, so folgt nach bekannten Principien

$$(11.)\quad v = -\frac{a_0}{\nu_1}y^{n-1}+\varrho_0 y^n+\varrho_1 y^{n+1}+\cdots$$

und somit nach (9.)

$$(12.)\quad x-\alpha = -\frac{a_0}{\nu_1}y^n+\varrho_0 y^{n+1}+\varrho_1 y^{n+2}+\cdots$$

oder durch Umkehrung

$$(13.)\quad y = \left(-\frac{\nu_1}{a_0}\right)^{\frac{1}{n}}(x-\alpha)^{\frac{1}{n}}+\sigma_2(x-\alpha)^{\frac{2}{n}}+\sigma_3(x-\alpha)^{\frac{3}{n}}+\cdots,$$

---

*) Ich verweise auf die in der neunten Vorlesung meines Lehrbuches der Theorie der elliptischen Functionen auseinandergesetzten Methoden zur Untersuchung algebraischer Functionen.

worin der Coefficient von $(x-\alpha)^{\frac{1}{n}}$ von Null verschieden ist. Der Punkt α ist also jedenfalls ein n-facher Verzweigungspunkt der n-blättrigen *Riemann*schen Fläche der durch die Gleichung (7.) definirten algebraischen Function, und dadurch allein schon die Irreductibilität erwiesen vermöge des Satzes*), dass eine algebraische Function irreductibel ist, wenn die Blätter der zugehörigen *Riemann*schen Fläche sämmtlich durch Verzweigungsschnitte mit einander zusammenhängen — hier längs des von α durch alle n Blätter in die Unendlichkeit geführten Schnittes.

Wir wollen aber auch umgekehrt beweisen, dass, wenn eine n-deutige algebraische Function, welche durch die Gleichung definirt sein mag

$$(14.)\qquad f_0(x)y^n+f_1(x)y^{n-1}+\cdots+f_{n-1}(x)y+f_n(x) = 0,$$

einen n-fachen Verzweigungspunkt $x=\alpha$ besitzt, in welchem sie verschwindet, und in dessen Umgebung sie die Entwickelung besitzt

$$(15.)\qquad y = m_1(x-\alpha)^{\frac{1}{n}}+m_2(x-\alpha)^{\frac{2}{n}}+\cdots,$$

worin m_1 von Null verschieden ist, diese Gleichung (14.) die Gestalt der Gleichung (7.) haben muss. Bezeichnet nämlich ε eine primitive $n$te Einheitswurzel, so dass sich die n Zweige der algebraischen Function in der Umgebung von α in der Form darstellen

$$(16.)\qquad \begin{cases} y_1 = m_1(x-\alpha)^{\frac{1}{n}}+m_2(x-\alpha)^{\frac{2}{n}}+\cdots, \\ y_2 = \varepsilon m_1(x-\alpha)^{\frac{1}{n}}+\varepsilon^2 m_2(x-\alpha)^{\frac{2}{n}}+\cdots, \\ y_3 = \varepsilon^2 m_1(x-\alpha)^{\frac{1}{n}}+\varepsilon^4 m_2(x-\alpha)^{\frac{2}{n}}+\cdots, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_n = \varepsilon^{n-1} m_1(x-\alpha)^{\frac{1}{n}}+\varepsilon^{2(n-1)} m_2(x-\alpha)^{\frac{2}{n}}+\cdots, \end{cases}$$

so werden sich

$$y_1+y_2+\cdots+y_n,\quad y_1y_2+\cdots+y_{n-1}y_n,\quad \ldots,\quad y_1y_2\ldots y_{n-1}+\cdots+y_2\ldots y_n$$

vermöge der Gleichung (14.) jedenfalls als rationale Functionen von x ergeben, die nach (16.) für $x=\alpha$ verschwinden, während

$$y_1y_2\ldots y_n = (-1)^{n-1}m_1^n(x-\alpha)+\tau_2(x-\alpha)^2+\cdots$$

ebenfalls eine für $x=\alpha$ verschwindende rationale Function von x sein wird,

*) Vgl. neunte Vorlesung S. 174.

welche jedoch den Factor $x-\alpha$ nur in der ersten Potenz enthält, wodurch also (14.) in (7.) übergeht, und wir können somit den Satz aussprechen:

Alle n-deutigen algebraischen Functionen, welche in $x=\alpha$ einen n-fachen Verzweigungspunkt besitzen, in welchem sie den Werth Null annehmen), und in dessen Umgebung die Entwickelung mit dem Gliede $(x-\alpha)^{\frac{1}{n}}$ beginnt, und nur diese sind Lösungen von algebraischen Gleichungen der Form*

$$F_0(x)y^n+(x-\alpha)F_1(x)y^{n-1}+(x-\alpha)F_2(x)y^{n-2}+\cdots$$
$$\cdots+(x-\alpha)F_{n-1}(x)y+(x-\alpha)F_n(x) = 0,$$

worin $F_0(x)$, $F_1(x)$, ..., $F_n(x)$ ganze Functionen von x sind, von denen die erste und letzte für $x=\alpha$ nicht verschwinden.

Wir erkennen somit, dass *der Eisensteinsche Satz für Zahlengleichungen analog ist dem einfachsten Falle der für die Irreductibilität einer n-deutigen algebraischen Function hinreichenden Bedingung, dass dieselbe einen n-fachen Verzweigungspunkt α besitzt, in dessen Umgebung die Entwickelung mit der ersten Potenz von $(x-\alpha)^{\frac{1}{n}}$ beginnt**).*

Nach dem oben angeführten Satze der Functionentheorie wird aber *jede* n-deutige algebraische Function, welche in $x=\alpha$ einen n-fachen Ver-

*) Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass, wenn die n-deutige algebraische Function für $x=\alpha$ einen n-fachen Verzweigungspunkt besitzt, in welchem sie den Werth β annimmt, die sie definirende Gleichung die Form haben wird

$$F_0(x)(y-\beta)^n+(x-\alpha)F_1(x)(y-\beta)^{n-1}+\cdots+(x-\alpha)F_{n-1}(x)(y-\beta)+(x-\alpha)F_n(x) = 0,$$

die nur durch Auflösung der Binome umzuschreiben ist.

**) Aus dieser Analogie ist ersichtlich, weshalb der oben angeführte Satz nicht nur für reelle ganze Zahlen gilt, sondern in der schon von *Eisenstein* in seiner Arbeit über die Irreductibilität der Theilungsgleichung der ganzen Lemniscate ausgesprochenen folgenden Form: „Wenn in einer ganzen Function $F(x)$ von x von beliebigem Grade der Coefficient des höchsten Gliedes $=1$ ist, und alle folgenden Coefficienten ganze (reelle, complexe) Zahlen sind, in welchen eine gewisse (reelle resp. complexe) Primzahl m aufgeht, wenn ferner der letzte Coefficient $=\varepsilon m$ ist, wo ε eine nicht durch m theilbare Zahl vorstellt: so ist es unmöglich $F(x)$ auf die Form

$$(x^\mu+a_1x^{\mu-1}+\cdots+a_\mu)(x^\nu+b_1x^{\nu-1}+\cdots+b_\nu)$$

zu bringen, wo μ und $\nu \geqq 1$, $\mu+\nu =$ dem Grade von $F(x)$, und alle a und b (reelle resp. complexe) ganze Zahlen sind; und die Gleichung $F(x)=0$ ist demnach irreductibel."

Es mag hier noch bemerkt werden, dass die von *Eisenstein* gegebene Verallgemeinerung „dass jede Gleichung mit ganzen Coefficienten irreductibel ist, in welcher, ausser dem ersten, sämmtliche Coefficienten durch m, aber nicht sämmtliche durch m^2 theilbar sind" offenbar auf einem Irrthum beruht.

zweigungspunkt hat, in welchem sie verschwindet, gleichgültig mit welcher Potenz von $(x-\alpha)^{\frac{1}{n}}$ die Entwickelung derselben beginnt, irreductibel sein, und wir wollen sehen, ob wir durch die umgekehrten Betrachtungen wie die oben angestellten, indem wir von den Gleichungen, welche algebraische Functionen dieser Art definiren, zu den Zahlengleichungen zurückgehen, zu Erweiterungen des *Eisenstein*schen Satzes gelangen können.

Nehmen wir also zunächst an, die Entwickelung der n-deutigen, im Punkte $x=\alpha$ verschwindenden, durch die Gleichung (14.) definirten algebraischen Function habe in der Umgebung des Punktes α die Form

$$(17.)\qquad y = m_r(x-\alpha)^{\frac{r}{n}}+m_{r+1}(x-\alpha)^{\frac{r+1}{n}}+\cdots,$$

in welcher r relativ prim zu n*) und m_r von Null verschieden ist, so werden sich, wenn ε wieder eine primitive $n$te Einheitswurzel bedeutet, aus

$$\begin{aligned}
y_1 &= m_r(x-\alpha)^{\frac{r}{n}}+m_{r+1}(x-\alpha)^{\frac{r+1}{n}}+\cdots,\\
y_2 &= \varepsilon^r m_r(x-\alpha)^{\frac{r}{n}}+\varepsilon^{r+1}m_{r+1}(x-\alpha)^{\frac{r+1}{n}}+\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_n &= \varepsilon^{(n-1)r}m_r(x-\alpha)^{\frac{r}{n}}+\varepsilon^{(n-1)(r+1)}m_{r+1}(x-\alpha)^{\frac{r+1}{n}}+\cdots
\end{aligned}$$

die Ausdrücke ergeben

$$\begin{aligned}
y_1+y_2+\cdots+y_n &= (x-\alpha)^{\delta_1}\varphi_1(x),\\
y_1y_2+\cdots+y_{n-1}y_n &= (x-\alpha)^{\delta_2}\varphi_2(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_1y_2\ldots y_{n-1}+\cdots+y_2y_3\ldots y_n &= (x-\alpha)^{\delta_{n-1}}\varphi_{n-1}(x),\\
y_1y_2\ldots y_n &= (x-\alpha)^r\varphi_n(x),
\end{aligned}$$

worin, wenn $e\left(\frac{\lambda r}{n}\right)$ die grösste in $\frac{\lambda r}{n}$ enthaltene ganze Zahl bedeutet,

$$(18.)\qquad \delta_\lambda = e\left(\frac{\lambda r}{n}\right)+1$$

*) Die Voraussetzung, dass r relativ prim zu n ist, muss deshalb gemacht werden, weil, wenn dies nicht geschieht, aus der Form der Entwickelung (17.) gar keine Schlüsse für die Gestalt der die Function definirenden algebraischen Gleichung abgeleitet werden können, da die Zähler aller folgenden Exponenten ebenfalls mit n einen Theiler gemein haben könnten, und somit α gar kein n-facher Verzweigungspunkt der Function zu sein brauchte; würde man also r nicht relativ prim zu n annehmen, so müsste sich die Untersuchung auch auf die weiteren Glieder der Reihe erstrecken.

ist, und $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ rationale Functionen von x sind, von denen die letztere für $x = \alpha$ nicht verschwindet, und es wird somit die algebraische Gleichung, welche die Function (17.) definirt, die Form haben

$$(19.)\quad \begin{cases} F_0(x)y^n + (x-\alpha)^{\delta_1}F_1(x)y^{n-1} + (x-\alpha)^{\delta_2}F_2(x)y^{n-2} + \cdots \\ \qquad \cdots + (x-\alpha)^{\delta_{n-1}}F_{n-1}(x)y + (x-\alpha)^r F_n(x) = 0, \end{cases}$$

worin $F_0(x)$, ..., $F_n(x)$ ganze Functionen von x bedeuten, für welche $F_0(\alpha)$ und $F_n(\alpha)$ von Null verschieden sind.

Wir wollen nun umgekehrt untersuchen, von welcher Form die Entwickelung einer jeden durch eine Gleichung von der Gestalt (19.) definirten algebraischen Function in der Umgebung des Punktes $x = \alpha$ ist, für welchen die n Lösungen der Gleichung (19.) verschwinden, und zwar unter der Annahme, dass r zu n relativ prim ist, wobei wir des Folgenden wegen nicht, wie man es auch thun kann, durch eine Substitution zur früheren Gleichungsform übergehen, sondern den in allen, auch den späteren complicirteren Fällen durchführbaren functionentheoretischen Weg einschlagen wollen.

Entwickelt man $\frac{r}{n}$ in den elementaren Kettenbruch

$$(20.)\quad \frac{r}{n} = k + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{r_{\varepsilon-1} + \cfrac{1}{r_\varepsilon}}}}},$$

so dass die Beziehungen bestehen

$$(21.)\quad \begin{cases} r = kn + \varrho, \\ n = r_1\varrho + \varrho_1, \\ \varrho = r_2\varrho_1 + \varrho_2, \\ \varrho_1 = r_3\varrho_2 + \varrho_3, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \varrho_{\varepsilon-3} = r_{\varepsilon-1}\varrho_{\varepsilon-2} + \varrho_{\varepsilon-1}, \\ \varrho_{\varepsilon-2} = r_\varepsilon\varrho_{\varepsilon-1}, \end{cases}$$

für welche $\varrho < n$, $\varrho_1 < \varrho$, $\varrho_2 < \varrho_1$, ..., $\varrho_{\varepsilon-2} < \varrho_{\varepsilon-3}$ und $\varrho_{\varepsilon-1} = 1$ ist, da r zu n relativ prim angenommen wurde, und macht auf Gleichung (19.) die Substitution

$$(22.)\quad \frac{y}{(x-\alpha)^k} = v,$$

so ergiebt sich die Gleichung

$$F_0(x)(x-\alpha)^{nk}v^n+(x-\alpha)^{\delta_1+(n-1)k}F_1(x)v^{n-1}+(x-\alpha)^{\delta_2+(n-2)k}F_2(x)v^{n-2}+\cdots$$
$$\cdots+(x-\alpha)^{\delta_{n-1}+k}F_{n-1}(x)v+(x-\alpha)^{nk+\varrho}F_n(x) = 0$$

oder, wenn man beachtet, dass

$$\eta_p = \delta_p-pk = e\Big(\frac{pr}{n}\Big)+1-pe\Big(\frac{r}{n}\Big) \tag{23.}$$

stets eine positive ganze Zahl ist, durch Division mit $(x-\alpha)^{nk}$

$$\begin{cases}(a_0+a_1(x-\alpha)+\cdots)v^n+(b_0(x-\alpha)^{\eta_1}+b_1(x-\alpha)^{\eta_1+1}+\cdots)v^{n-1}+\cdots\\ \cdots+(\mu_0(x-\alpha)^{\eta_{n-1}}+\mu_1(x-\alpha)^{\eta_{n-1}+1}+\cdots)v\\ +(\nu_0(x-\alpha)^{\varrho}+\nu_1(x-\alpha)^{\varrho+1}+\cdots) = 0,\end{cases} \tag{24.}$$

worin a_0 und ν_0 von Null verschieden sind. Da diese Gleichung wiederum für $x=\alpha$ die n gleichen Lösungen $v=0$ liefert, so setze man in (24.)

$$\frac{x-\alpha}{v^{r_1}} = w \tag{25.}$$

und erhält

$$\begin{cases}(a_0+a_1v^{r_1}w+\cdots)v^n+(b_0+b_1v^{r_1}w+\cdots)v^{r_1\eta_1+n-1}w^{\eta_1}\\ +(c_0+c_1v^{r_1}w+\cdots)v^{r_1\eta_2+n-2}w^{\eta_2}+\cdots+(\mu_0+\mu_1v^{r_1}w+\cdots)v^{r_1\eta_{n-1}+1}w^{\eta_{n-1}}\\ +(\nu_0+\nu_1v^{r_1}w+\cdots)v^{r_1\varrho}w^{\varrho} = 0\end{cases} \tag{26.}$$

oder durch Division mit $v^{r_1\varrho}$ mit Berücksichtigung von (21.)

$$\begin{cases}(a_0+a_1v^{r_1}w+\cdots)v^{\varrho_1}+(b_0+b_1v^{r_1}w+\cdots)v^{r_1\eta_1-1+\varrho_1}w^{\eta_1}\\ +(c_0+c_1v^{r_1}w+\cdots)v^{r_1\eta_2-2+\varrho_1}w^{\eta_2}+\cdots+(\mu_0+\mu_1v^{r_1}w+\cdots)v^{r_1\eta_{n-1}-(n-1)+\varrho_1}w^{\eta_{n-1}}\\ +(\nu_0+\nu_1v^{r_1}w+\cdots)w^{\varrho} = 0.\end{cases} \tag{27.}$$

Nun ist aber leicht zu sehen, dass die ganzen Zahlen

$$r_1\eta_1-1+\varrho_1,\quad r_1\eta_2-2+\varrho_1,\quad \ldots,\quad r_1\eta_{n-1}-(n-1)+\varrho_1 \tag{28.}$$

sämmtlich positiv sind; denn da vermöge (23.) für $p=1,2,\ldots,n-1$ mit Benutzung von (21.)

$$r_1\eta_p-p+\varrho_1 = r_1\Big\{e\Big(\frac{pr}{n}\Big)+1-pe\Big(\frac{r}{n}\Big)\Big\}-p+\varrho_1 = r_1\Big\{e\Big(\frac{p\varrho}{n}\Big)+1\Big\}-p+\varrho_1$$

ist, so wird, wenn

$$p = mr_1+\alpha$$

gesetzt wird, worin $\alpha<r_1$ und wegen $n=\varrho r_1+\varrho_1$, worin $\varrho_1<\varrho<n$, vermöge (21.)

$$r_1\eta_p-p+\varrho_1 = r_1\Big\{e\Big(\frac{mr_1\varrho+\alpha\varrho}{r_1\varrho+\varrho_1}\Big)+1\Big\}-(mr_1+\alpha)+\varrho_1,$$

und hieraus die Behauptung unmittelbar ersichtlich. Sind aber die Ausdrücke (28.) sämmtlich positive ganze Zahlen, so liefert die Gleichung (27.) für $v = 0$ ϱ verschwindende Lösungen für w, da ν_0 von Null verschieden war, und setzt man jetzt wieder der Gleichung (25.) analog mit Rücksicht auf (21.)

$$\frac{v}{w^{r_2}} = w_1, \tag{29.}$$

so ergiebt sich eine Gleichung der Form

$$\left\{\begin{aligned}(a_0+a_1 w^{r_1 r_2+1} w_1^{r_1}+\cdots) w^{r_2\varrho_1} w_1^{\varrho_1} \\ +(b_0+b_1 w^{r_1 r_2+1} w_1^{r_1}+\cdots) w^{r_2[r_1\eta_1-1+\varrho_1]+\eta_1} w_1^{r_1\eta_1-1+\varrho_1}+\cdots \\ \cdots+(\mu_0+\mu_1 w^{r_1 r_2+1} w_1^{r_1}+\cdots) w^{r_2[r_1\eta_{n-1}-(n-1)+\varrho_1]+\eta_{n-1}} w_1^{r_1\eta_{n-1}-(n-1)+\varrho_1} \\ +(\nu_0+\nu_1 w^{r_1 r_2+1} w_1^{r_1}+\cdots) w^{r_2\varrho_1+\varrho_2} = 0,\end{aligned}\right. \tag{30.}$$

welche durch $w^{r_2\varrho_1}$ dividirt wieder wie vorher positive ganze Exponenten der Variablen besitzt und somit, da a_0 von Null verschieden ist, für $w = 0$ ϱ_1 verschwindende Lösungen für w_1 liefert. Fährt man in derselben Weise fort, so wird sich, da die Grössen ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ... abnehmen, und schliesslich $\varrho_{\varepsilon-1} = 1$ war, endlich eine Gleichung von der Form ergeben

$$\left\{\begin{aligned}(a_0+a_1 w_{\varepsilon-2}^{\zeta_2} w_{\varepsilon-1}^{\zeta_1}+\cdots) w_{\varepsilon-1}+(b_0+b_1 w_{\varepsilon-2}^{\zeta_2} w_{\varepsilon-1}^{\zeta_1}+\cdots) w_{\varepsilon-2}^{k_2} w_{\varepsilon-1}^{k_1}+\cdots \\ \cdots+(\nu_0+\nu_1 w_{\varepsilon-2}^{\zeta_2} w_{\varepsilon-1}^{\zeta_1}+\cdots) = 0,\end{aligned}\right. \tag{31.}$$

welche für $w_{\varepsilon-2} = 0$ einen einfachen endlichen von Null verschiedenen Werth für $w_{\varepsilon-1}$ liefert, so dass für diese letztere Variable in der Umgebung des Nullpunktes die Entwickelung besteht:

$$w_{\varepsilon-1} = q_0+q_1 w_{\varepsilon-2}+q_2 w_{\varepsilon-2}^2+\cdots, \tag{32.}$$

in welcher q_0 von Null verschieden ist; aus der unmittelbar vorausgehenden Substitution

$$\frac{w_{\varepsilon-3}}{w_{\varepsilon-2}^{r_\varepsilon}} = w_{\varepsilon-1} \tag{33.}$$

folgt also nach (21.)

$$w_{\varepsilon-3} = q_0 w_{\varepsilon-2}^{\varrho_{\varepsilon-2}}+q_1 w_{\varepsilon-2}^{\varrho_{\varepsilon-2}+1}+\cdots \tag{34.}$$

und weiter vermöge der Substitution

$$\frac{w_{\varepsilon-4}}{w_{\varepsilon-3}^{r_{\varepsilon-1}}} = w_{\varepsilon-2} \tag{35.}$$

die Entwickelung

$$(36.)\qquad w_{\varepsilon-4} = s_0 w_{\varepsilon-2}^{\varrho_{\varepsilon-3}} + s_1 w_{\varepsilon-2}^{\varrho_{\varepsilon-3}+1} + \cdots$$

u. s. w., bis sich

$$(37.)\qquad w = t_0 w_{\varepsilon-2}^{\varrho_1} + t_1 w_{\varepsilon-2}^{\varrho_1+1} + \cdots$$

und hieraus

$$(38.)\qquad v = u_0 w_{\varepsilon-2}^{\varrho} + u_1 w_{\varepsilon-2}^{\varrho+1} + \cdots$$

ergeben; aus (37.) und (38.) folgen aber endlich nach (25.) und (22.) die Entwickelungen

$$(39.)\qquad x-\alpha = \sigma_0 w_{\varepsilon-2}^{n} + \sigma_1 w_{\varepsilon-2}^{n+1} + \cdots$$

und

$$(40.)\qquad y = \tau_0 w_{\varepsilon-2}^{r} + \tau_1 w_{\varepsilon-2}^{r+1} + \cdots,$$

in denen, da q_0 von Null verschieden war, auch σ_0 und τ_0 nicht verschwinden werden. Durch Umkehrung der Reihe (39.) erhält man nun

$$(41.)\qquad w_{\varepsilon-2} = \sigma_0^{-\frac{1}{n}}(x-\alpha)^{\frac{1}{n}} + \varphi_1(x-\alpha)^{\frac{2}{n}} + \cdots$$

und danach aus (40.)

$$(42.)\qquad y = \tau_0\sigma_0^{-\frac{r}{n}}(x-\alpha)^{\frac{r}{n}} + \psi_1(x-\alpha)^{\frac{r+1}{n}} + \cdots,$$

also die gesuchte Entwickelung, und es ergiebt sich somit der folgende Satz:

Alle n-deutigen algebraischen Functionen, welche in $x=\alpha$ einen n-fachen Verzweigungspunkt besitzen, in welchem sie den Werth Null annehmen, und in dessen Umgebung die Entwickelung mit dem Gliede $(x-\alpha)^{\frac{r}{n}}$ beginnt, worin r relativ prim zu n ist, und **nur** *diese sind Lösungen von algebraischen Gleichungen der Form*

$$(43.)\qquad \begin{cases} F_0(x)y^n + (x-\alpha)^{e\left(\frac{r}{n}\right)+1}F_1(x)y^{n-1} + (x-\alpha)^{e\left(\frac{2r}{n}\right)+1}F_2(x)y^{n-2} + \cdots \\ \qquad\cdots + (x-\alpha)^{e\left(\frac{(n-1)r}{n}\right)+1}F_{n-1}(x)y + (x-\alpha)^r F_n(x) = 0, \end{cases}$$

worin $F_0(x)$, $F_1(x)$, ..., $F_n(x)$ ganze Functionen von x sind, von denen die erste und letzte für $x=\alpha$ nicht verschwinden — daraus folgt, *dass alle Gleichungen von der Form* (43.), *wenn r zu n relativ prim ist, irreductibel sind.*

Wir wollen nun jetzt nach der oben gefundenen Analogie die ganzzahlige Gleichung bilden

$$(44.)\quad a_0x^n+p^{e\left(\frac{r}{n}\right)+1}a_1x^{n-1}+p^{e\left(\frac{2r}{n}\right)+1}a_2x^{n-2}+\cdots+p^{e\left(\frac{(n-1)r}{n}\right)+1}a_{n-1}x+p^ra_n = 0,$$

in welcher p eine Primzahl, r relativ prim zu n, a_0 und a_n durch p nicht theilbar sind, und dieselbe in Bezug auf ihre Zerlegbarkeit untersuchen.

Gehen wir von der nach dem *Eisenstein*schen Satze irreductiblen ganzzahligen Gleichung

$$(45.)\qquad A_0y^n+pA_1y^{n-1}+pA_2y^{n-2}+\cdots+pA_{n-1}y+pA_n = 0$$

aus, in welcher A_0 und A_n durch p nicht theilbar sind, und machen auf diese die Substitution

$$(46.)\qquad x = y^r,$$

worin r kleiner als n*) und relativ prim zu n, so werden die Coefficienten der resultirenden Gleichung $n$ten Grades in y

$$(47.)\qquad P_0x^n+P_1x^{n-1}+P_2x^{n-2}+\cdots+P_{n-1}x+P_n = 0$$

durch die Gleichungen bestimmt sein

$$(48.)\qquad \frac{P_\lambda}{P_0} = \pm\Sigma x_1x_2\dots x_\lambda = \pm\Sigma y_1^ry_2^r\dots y_\lambda^r = \Sigma\left(p\frac{A_1}{A_0}\right)^{\mu_1}\left(p\frac{A_2}{A_0}\right)^{\mu_2}\cdots\left(p\frac{A_n}{A_0}\right)^{\mu_n},$$

worin vermöge der bekannten Sätze von dem Gewichte und Grade symmetrischer Functionen die positiven ganzen Zahlen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ den beiden Bedingungen unterworfen sind

$$(49.)\qquad 1.\mu_1+2.\mu_2+\cdots+n.\mu_n = \lambda r,$$

$$(50.)\qquad \mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n \leqq r.$$

Ist nun $\lambda = 1$, so sieht man aus den beiden Beziehungen

$$1.\mu_1+2.\mu_2+\cdots+n.\mu_n = r,$$
$$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n \leqq r,$$

dass, wegen $r < n$, $\mu_r = 1$ gewählt werden kann, während alle anderen μ verschwinden, allgemein, wenn $\alpha r < n$ also $e\left(\frac{\alpha r}{n}\right) = 0$ ist, wird man das Bedingungssystem

$$1.\mu_1+2.\mu_2+\cdots+n\mu_n = \alpha r,$$
$$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n \leqq r$$

*) Diese Annahme wird nur zur Erreichung grösserer Einfachheit des Beweises gemacht.

dadurch befriedigen können, dass man $\mu_{\alpha r}=1$, alle anderen μ gleich Null setzt, und es wird somit in der Summe der rechten Seite der Gleichung (48.) im allgemeinen auch ein Posten vorkommen, der p nur zur ersten Potenz enthält, also $P_1, P_2, \dots, P_\alpha$ in die Form gesetzt werden können

$$p^{e\left(\frac{r}{n}\right)+1}a_1,\quad p^{e\left(\frac{2r}{n}\right)+1}a_2,\quad \dots,\quad p^{e\left(\frac{\alpha r}{n}\right)+1}a_\alpha.$$

Ist nun $(\alpha+1)r>n$ und $<2n$, so zeigen die Bedingungsgleichungen

$$1.\mu_1+2.\mu_2+\cdots+n.\mu_n = (\alpha+1)r,$$
$$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n \leqq r,$$

dass nicht nur *eins* der $\mu=1$ sein kann, während die übrigen verschwinden, sondern dass mindestens eines der μ den Werth 2 und die übrigen den Werth Null oder zwei der μ den Werth 1 haben müssen, während die übrigen verschwinden, und dies wird ebenso für die weiteren Vielfachen $(\alpha+2)r$, $(\alpha+3)r$, ... gelten, so lange diese kleiner als $2n$ sind, in allen diesen Fällen werden im allgemeinen also die zugehörigen P Posten enthalten, welche sämmtlich durch p^2 theilbar sind, aber keine Posten, welche nur p als Factor haben, so dass alle diese Coefficienten $P_{\alpha+1}, P_{\alpha+2}, \dots$ in die Form gesetzt werden können

$$p^{e\left(\frac{(\alpha+1)r}{n}\right)+1}a_{\alpha+1},\quad p^{e\left(\frac{(\alpha+2)r}{n}\right)+1}a_{\alpha+2},\quad \dots;$$

fährt man in diesen Schlüssen fort, und bemerkt, dass

$$\frac{P_n}{P_0} = \pm x_1x_2\dots x_n = \pm y_1^r y_2^r \dots y_n^r = p^r\frac{A_n^r}{A_0^r}$$

ist, worin A_n der Voraussetzung gemäss den Theiler p nicht mehr besitzt, so ist unmittelbar ersichtlich, dass die mit Hülfe der Substitution (46.) aus (45.) abgeleitete Gleichung die Form hat

$$(51.)\quad a_0x^n+p^{e\left(\frac{r}{n}\right)+1}a_1x^{n-1}+p^{e\left(\frac{2r}{n}\right)+1}a_2x^{n-2}+\cdots+p^{e\left(\frac{(n-1)r}{n}\right)+1}a_{n-1}x+p^ra_n = 0.$$

Nun lässt sich aber erweisen, dass diese Gleichung eine irreductible ist; denn angenommen, sie liesse sich in ganzzahlige Factoren zerlegen, von denen ein irreductibler gleich Null gesetzt

$$(52.)\qquad \alpha_0x^\nu+\alpha_1x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_{\nu-1}x+\alpha_\nu = 0$$

sein möge, worin $\nu<n$ ist, und habe dieser die Lösungen $x_1, x_2, \dots, x_\nu$, so wird durch Ausübung der Substitution (46.) dieselbe in die ganzzahlige Gleichung

$$(53.)\qquad \alpha_0y^{\nu r}+\alpha_1y^{(\nu-1)r}+\cdots+\alpha_{\nu-1}y^r+\alpha_\nu = 0$$

übergehen, deren Lösungen, wenn ε eine primitive $r$te Einheitswurzel bedeutet, durch

$$x_1^{\frac{1}{r}},\ \varepsilon x_1^{\frac{1}{r}},\ \varepsilon^2 x_1^{\frac{1}{r}},\ \ldots,\ \varepsilon^{r-1} x_1^{\frac{1}{r}},\ x_2^{\frac{1}{r}},\ \varepsilon x_2^{\frac{1}{r}},\ \varepsilon^2 x_2^{\frac{1}{r}},\ \ldots,\ \varepsilon^{r-1} x_2^{\frac{1}{r}},\ \ldots,$$
$$x_\nu^{\frac{1}{r}},\ \varepsilon x_\nu^{\frac{1}{r}},\ \varepsilon^2 x_\nu^{\frac{1}{r}},\ \ldots,\ \varepsilon^{r-1} x_\nu^{\frac{1}{r}}$$

dargestellt werden. Da aber die Gleichung (45.) eine irreductible war, also alle ihre Lösungen zugleich die Gleichung (53.) befriedigen müssen, so folgt, da $\nu < n$, dass zwei Lösungen der Gleichung (45.) sich nur durch eine multiplicatorische Potenz der Einheitswurzel ε unterscheiden werden, oder dass zwischen zwei Lösungen y_λ und y_μ die Beziehung stattfinden wird

$$y_\mu = \varepsilon^k y_\lambda,$$

worin $k < r$ ist, oder dass nach (46.) die entsprechenden Lösungen der Gleichung (51.) x_μ und x_λ einander gleich wären; dass dies aber nicht der Fall sein kann*), soll in folgender Weise gezeigt werden. Wenn zwei Lösungen der Gleichung (51.) einander gleich wären, so müsste die Discriminante D dieser Gleichung verschwinden, welche bekanntlich die Form hat

$$(54.)\quad D = \Sigma C\left(p^{e\left(\frac{r}{n}\right)+1}\frac{a_1}{a_0}\right)^{\mu_1}\left(p^{e\left(\frac{2r}{n}\right)+1}\frac{a_2}{a_0}\right)^{\mu_2}\cdots\left(p^{e\left(\frac{(n-1)r}{n}\right)+1}\frac{a_{n-1}}{a_0}\right)^{\mu_{n-1}}\left(p^r\frac{a_n}{a_0}\right)^{\mu_n},$$

in welcher nach dem Satze von dem Gewicht der Discriminante die positiven ganzen Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_n$ den Bedingungen unterliegen

$$(55.)\qquad 1.\mu_1+2.\mu_2+\cdots+(n-1)\mu_{n-1}+n\mu_n = n(n-1)$$

und

$$(56.)\qquad \mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{n-1}+\mu_n \leqq 2(n-1);$$

zunächst ist nun unmittelbar zu sehen, dass

$$\mu_1 = 0,\quad \mu_2 = 0,\quad \ldots,\quad \mu_{n-1} = 0,\quad \mu_n = n-1$$

diesen beiden Bedingungsgleichungen Genüge leisten, und dass also ein Posten der Discriminante lautet

$$\left(p^r\frac{a_n}{a_0}\right)^{n-1},$$

und also, da a_n und a_0 der Voraussetzung nach durch p nicht theilbar sind, dieser Posten der Discriminante durch $p^{r(n-1)}$ und durch keine höhere

*) Dadurch wird also auch bewiesen sein, dass zwei Lösungen der irreductiblen Gleichung (45.) sich nicht nur durch die multiplicatorische Potenz einer $r$ten Einheitswurzel unterscheiden können.

Potenz von p theilbar ist. Bemerkt man aber ferner, dass nach Gleichung (55.)

$$\frac{r}{n}\cdot\mu_1+\frac{2r}{n}\cdot\mu_2+\frac{3r}{n}\cdot\mu_3+\cdots+\frac{(n-1)r}{n}\mu_{n-1}+\frac{nr}{n}\mu_n = r(n-1)$$

und somit, wie unmittelbar zu sehen,

$$(57.)\quad \begin{cases} \left(e\left(\frac{r}{n}\right)+1\right)\mu_1+\left(e\left(\frac{2r}{n}\right)+1\right)\mu_2+\left(e\left(\frac{3r}{n}\right)+1\right)\mu_3+\cdots \\ \qquad\cdots+\left(e\left(\frac{(n-1)r}{n}\right)+1\right)\mu_{n-1}+r\mu_n > r(n-1) \end{cases}$$

ist, so ist, da jeder Posten der Discriminante D nach (54.) durch eine Potenz der Primzahl p theilbar ist, welche durch die linke Seite der Ungleichheit (57.) angegeben ist, der gesammte Ausdruck der Discriminante durch $p^{r(n-1)}$ dividirbar, und es lässt sich daher die Gleichung, welche ausdrückt, dass die Discriminante verschwindet, in die Form setzen

$$M+pN = 0$$

worin M und N ganze Zahlen bedeuten, von denen die erstere von Null verschieden und durch p nicht theilbar ist, was nicht angeht — also kann die Gleichung (51.) nicht gleiche Lösungen haben und ***muss also nach den obigen Auseinandersetzungen irreductibel sein.***

Nun könnte man den Beweis dafür, dass jede Gleichung (51.) — und nicht nur die durch Substitutionen der Form (46.) aus (45.) abgeleiteten — irreductibel ist, wiederum mit Hülfe des Ausdruckes für die Discriminante herleiten, indem man unter der Annahme der Zerlegbarkeit des Polynoms (51.) den Satz benutzt, dass die Discriminante des Productes zweier Functionen gleich ist dem Producte der beiden Discriminanten multiplicirt mit dem Quadrate der Resultante derselben, wir wollen jedoch an dieser Stelle den Beweis durch Zurückführung auf den *Eisenstein*schen Satz zu geben suchen, und es wird genügen, denselben für eine Gleichung 5ten Grades durchzuführen, also zu beweisen, dass *jede Gleichung der Form*

$$(58.)\quad a_0x^5+p^{e\left(\frac{r}{5}\right)+1}a_1x^4+p^{e\left(\frac{2r}{5}\right)+1}a_2x^3+p^{e\left(\frac{3r}{5}\right)+1}a_3x^2+p^{e\left(\frac{4r}{5}\right)+1}a_4x+p^ra_5 = 0,$$

in welcher r eine der Zahlen 1, 2, 3, 4 *und* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_5$ *beliebige ganze Zahlen bedeuten, von denen die erste und letzte durch die Primzahl p nicht theilbar sind, stets irreductibel ist,* wobei der Fall $r=1$ durch den *Eisenstein*schen Satz erledigt ist.

Sei zunächst $r=4$, also die Gleichung vorgelegt

$$(59.)\quad a_0x^5+pa_1x^4+p^2a_2x^3+p^3a_3x^2+p^4a_4x+p^4a_5 = 0,$$

so ist unmittelbar ersichtlich, dass dieselbe durch die Substitution

$$(60.)\qquad x = \frac{p}{y}$$

in die Gleichung transformirt wird

$$(61.)\qquad a_5y^5+pa_4y^4+pa_3y^3+pa_2y^2+pa_1y+pa_0 = 0,$$

welche nach dem *Eisenstein*schen Satz stets irreductibel ist, und dies zieht die Irreductibilität von (59.) nach sich, da die Zerlegung von (59.) mit Hülfe der Substitution (60.) auch die Zerlegung von (61.) bedingen würde.

Sei ferner $r=2$, also die Gleichung zu untersuchen

$$(62.)\qquad a_0x^5+pa_1x^4+pa_2x^3+p^2a_3x^2+p^2a_4x+p^2a_5 = 0,$$

so wende man auf (62.) die Substitution an

$$(63.)\qquad y=x^2 \quad \text{oder} \quad x=y^{\frac{1}{2}},$$

so dass man erhält

$$(a_0y^{\frac{5}{2}}+pa_2y^{\frac{3}{2}}+p^2a_4y^{\frac{1}{2}})+(pa_1y^{\frac{4}{2}}+p^2a_3y^{\frac{2}{2}}+p^2a_5) = 0,$$

und mit dem conjugirten Werthe multiplicirt

$$(64.)\qquad \left\{\begin{array}{l|l|l|l|l} a_0^2y^5+2p\,a_0a_2 & y^4+\;p^2a_2^2 & y^3+2p^3a_2a_4 & y^2+\;p^4a_4^2 & y-p^4a_5^2 = 0, \\ \quad -\;p^2a_1^2 & \quad +2p^2a_0a_4 & \quad -\;p^4a_3^2 & \quad -2p^4a_3a_5 & \\ & \quad -2p^3a_1a_3 & \quad -2p^3a_1a_5 & & \end{array}\right.$$

oder

$$(65.)\qquad A_0y^5+pA_1y^4+p^2A_2y^3+p^3A_3y^2+p^4A_4y+p^4A_5 = 0,$$

worin $A_0, A_1, \ldots, A_5$ ganze Zahlen bedeuten, von denen die erste und letzte nicht durch p theilbar sind. Da aber diese Gleichung nach (59.) irreductibel ist, so folgt wiederum die Irreductibilität von (62.), da eine Zerlegung dieser auch die Zerlegung von (65.) nach sich ziehen würde.

Dass endlich auch für $r=3$ die Gleichung

$$(66.)\qquad a_0x^5+pa_1x^4+p^2a_2x^3+p^2a_3x^2+p^3a_4x+p^3a_5 = 0$$

irreductibel sein muss, folgt daraus, dass dieselbe durch die Substitution

$$x = \frac{p}{y}$$

in

$$a_5y^5+pa_4y^4+pa_3y^3+p^2a_2y^2+p^2a_1y+p^2a_0 = 0$$

also in die Form (62.) übergeführt wird.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass zum Beweise der Irreductibilität der Gleichung

$$(67.)\qquad a_0x^n+p^{e\left(\frac{r}{n}\right)+1}a_1x^{n-1}+p^{e\left(\frac{2r}{n}\right)+1}a_2x^{n-2}+\cdots+p^{e\left(\frac{(n-1)r}{n}\right)+1}a_{n-1}x+p^ra_n = 0,$$

worin r zu n relativ prim ist, nur die Substitution

$$(68.)\qquad x = y^{\frac{1}{r}}$$

anzuwenden und der so erhaltene Ausdruck mit seinen den Potenzen

$$\varepsilon,\quad \varepsilon^2,\quad \varepsilon^3,\quad \ldots,\quad \varepsilon^{r-1}$$

entsprechenden conjugirten Werthen, worin ε eine primitive $r$te Einheitswurzel bedeutet, zu multipliciren ist, um den Satz zu erhalten,

dass jede Gleichung der Form (67.) *irreductibel ist.*

Aehnlich werden sich aus der bekannten Verzweigung einer algebraischen Function, mit Hülfe deren auf die Irreductibilität derselben geschlossen werden kann, durch die Form der dieselbe definirenden algebraischen Gleichung nach der oben angegebenen Uebertragung analoge Zahlengleichungen aufstellen lassen, auf deren Nicht-Zerlegbarkeit man unmittelbar wird schliessen können. Es mag genügen hier eine 6-blättrige *Riemann*sche Fläche zu untersuchen, welche für $x=\alpha$ und $x=\beta$ je 6 verschwindende Lösungen der zugehörigen algebraischen Gleichung besitzt, also für letztere die Form verlangt

$$(69.)\qquad \begin{cases} F_0(x)y^6+(x-\alpha)(x-\beta)F_1(x)y^5+(x-\alpha)(x-\beta)F_2(x)y^4 \\ \qquad +(x-\alpha)(x-\beta)F_3(x)y^3+(x-\alpha)(x-\beta)F_4(x)y^2 \\ \qquad\qquad +(x-\alpha)(x-\beta)F_5(x)y+(x-\alpha)(x-\beta)F_6(x) = 0, \end{cases}$$

in welcher $F_0(\alpha)$ und $F_0(\beta)$ von Null verschieden sein sollen, und welche die Eigenschaft haben soll, dass sich im Punkte α dreimal je zwei Blätter, und im Punkte β zweimal je drei Blätter verzweigen. Um zunächst die nothwendige Gestalt dieser algebraischen Gleichungen festzustellen, deren Lösungen in der Umgebung von α die Form haben werden

$$(70.)\qquad \begin{cases} y_1 = \varkappa_1(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}+\varkappa_2(x-\alpha)^{\frac{2}{2}}+\cdots, \\ y_2 = -\varkappa_1(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}+\varkappa_2(x-\alpha)^{\frac{2}{2}}-\cdots, \\ y_3 = \lambda_1(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}+\lambda_2(x-\alpha)^{\frac{2}{2}}+\cdots, \\ y_4 = -\lambda_1(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}+\lambda_2(x-\alpha)^{\frac{2}{2}}-\cdots, \\ y_5 = \mu_1(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}+\mu_2(x-\alpha)^{\frac{2}{2}}+\cdots, \\ y_6 = -\mu_1(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}+\mu_2(x-\alpha)^{\frac{2}{2}}-\cdots, \end{cases}$$

und von denen angenommen werden soll, dass $\varkappa_1$, λ_1, μ_1 von Null verschieden sind, werde bemerkt, dass in der Umgebung von $x=\alpha$

$$(71.)\quad \begin{cases} \Sigma y_1 = (x-\alpha)f_1(x), \quad \Sigma y_1y_2 = (x-\alpha)f_2(x), \quad \Sigma y_1y_2y_3 = (x-\alpha)^2 f_3(x), \\ \Sigma y_1y_2y_3y_4 = (x-\alpha)^2 f_4(x), \quad \Sigma y_1y_2y_3y_4y_5 = (x-\alpha)^3 f_5(x), \\ y_1y_2y_3y_4y_5y_6 = (x-\alpha)^3 f_6(x) \end{cases}$$

wird, worin $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_6(x)$ nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $x-\alpha$ fortschreitende Reihen bedeuten, von denen $f_6(\alpha)$ von Null verschieden ist; ebenso werden die Entwickelungen in der Umgebung von β

$$(72.)\quad \begin{cases} y_1 = m_1(x-\beta)^{\frac{1}{3}} + m_2(x-\beta)^{\frac{2}{3}} + \cdots, \\ y_2 = \varepsilon m_1(x-\beta)^{\frac{1}{3}} + \varepsilon^2 m_2(x-\beta)^{\frac{2}{3}} + \cdots, \\ y_3 = \varepsilon^2 m_1(x-\beta)^{\frac{1}{3}} + \varepsilon^4 m_2(x-\beta)^{\frac{2}{3}} + \cdots, \\ y_4 = n_1(x-\beta)^{\frac{1}{3}} + n_2(x-\beta)^{\frac{2}{3}} + \cdots, \\ y_5 = \varepsilon n_1(x-\beta)^{\frac{1}{3}} + \varepsilon^2 n_2(x-\beta)^{\frac{2}{3}} + \cdots, \\ y_6 = \varepsilon^2 n_1(x-\beta)^{\frac{1}{3}} + \varepsilon^4 n_2(x-\beta)^{\frac{2}{3}} + \cdots, \end{cases}$$

in welchen ε eine dritte Einheitswurzel bedeutet, und für welche wiederum angenommen werden soll, dass m_1 und n_1 von Null verschieden sind, in der Umgebung von $x=\beta$ die Beziehungen liefern

$$(73.)\quad \begin{cases} \Sigma y_1 = (x-\beta)\varphi_1(x), \quad \Sigma y_1y_2 = (x-\beta)\varphi_2(x), \quad \Sigma y_1y_2y_3 = (x-\beta)\varphi_3(x), \\ \Sigma y_1y_2y_3y_4 = (x-\beta)^2\varphi_4(x), \quad \Sigma y_1y_2y_3y_4y_5 = (x-\beta)^2\varphi_5(x), \\ y_1y_2y_3y_4y_5y_6 = (x-\beta)^2\varphi_6(x), \end{cases}$$

worin $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_6(x)$ nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $x-\beta$ fortschreitende Reihen bedeuten, von denen $\varphi_6(\beta)$ von Null verschieden ist. Fasst man die beiden Formen (71.) und (73.) zusammen, so erhalten wir den folgenden Satz:

Alle sechsdeutigen algebraischen Functionen, welche für $x=\alpha$ und $x=\beta$ sechs verschwindende Werthe annehmen, für welche im Punkte α dreimal je zwei, im Punkte β zweimal je drei Blätter zusammenhängen, und deren Entwickelungen in der Umgebung dieser Punkte mit den Gliedern $(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}$ resp. $(x-\beta)^{\frac{1}{3}}$ beginnen, sind die Lösungen von Gleichungen der Form

$$(74.)\quad \begin{cases} F_0(x)y^6 + (x-\alpha)(x-\beta)F_1(x)y^5 + (x-\alpha)(x-\beta)F_2(x)y^4 \\ \qquad + (x-\alpha)^2(x-\beta)F_3(x)y^3 + (x-\alpha)^2(x-\beta)^2F_4(x)y^2 \\ \qquad\qquad + (x-\alpha)^3(x-\beta)^2F_5(x)y + (x-\alpha)^3(x-\beta)^2F_6(x) = 0, \end{cases}$$

worin** $F_0(x)$, $F_1(x)$, ..., $F_6(x)$ **ganze Functionen von** x **bedeuten, für welche** $F_0(\alpha)$, $F_0(\beta)$, $F_6(\alpha)$, $F_6(\beta)$ **von Null verschieden sind.

Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Bedingungen die durch Gleichungen der Form (74.) dargestellten Functionen die oben geforderte Verzweigungsart der zugehörigen *Riemann*schen Fläche und die oben bezeichneten Anfangsglieder ihrer Entwickelungen in der Umgebung der Punkte α und β besitzen.

Da in der Umgebung von $x=\alpha$ die Entwickelung der Lösungen der obigen Gleichung die Form haben soll

$$(75.)\qquad y_\varrho = r_{1\varrho}(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}+r_{2\varrho}(x-\alpha)^{\frac{2}{2}}+\cdots,$$

worin die $r_{1\varrho}$ für die Werthe $\varrho = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ von Null verschieden sein sollen, so wird sich durch Umkehrung von (75.)

$$x-\alpha = r_{1\varrho}^{-2}y_\varrho^2+r'_{3\varrho}y_\varrho^3+\cdots$$

und somit

$$t_\varrho = \frac{x-\alpha}{y_\varrho^2} = r_{1\varrho}^{-2}+r'_{3\varrho}y_\varrho+\cdots$$

ergeben müssen; setzt man daher in (74.)

$$(76.)\qquad x-\alpha = y^2.t,$$

so ist nach Division mit y^6 t als Function von y durch die algebraische Gleichung gegeben

$$(77.)\quad \begin{cases} (a_0+a_1y^2t+\cdots)+yt(\alpha-\beta+y^2t)(b_0+b_1y^2t+\cdots)+t(\alpha-\beta+y^2t)(c_0+c_1y^2t+\cdots) \\ \quad +yt^2(\alpha-\beta+y^2t)(d_0+d_1y^2t+\cdots)+t^2(\alpha-\beta+y^2t)^2(e_0+e_1y^2t+\cdots) \\ \quad +yt^3(\alpha-\beta+y^2t)^2(f_0+f_1y^2t+\cdots)+t^3(\alpha-\beta+y^2t)^2(g_0+g_1y^2t+\cdots) = 0, \end{cases}$$

worin a_0 und g_0 der Voraussetzung gemäss von Null verschieden sein sollten; ergeben sich nun für $y=0$ drei verschiedene Werthe von t und zwar einfach, hat also die Gleichung

$$(78.)\qquad g_0(\alpha-\beta)^2t^3+e_0(\alpha-\beta)^2t^2+c_0(\alpha-\beta)t+a_0 = 0$$

drei verschiedene nicht verschwindende Lösungen — was offenbar immer der Fall ist, wenn $c_0=e_0=0$, oder was dasselbe ist, wenn $F_2(\alpha)=F_4(\alpha)=0$ oder $F_2(x)$ und $F_4(x)$ den Factor $x-\alpha$ enthalten —, dann werden sich für die zugehörigen drei Werthe t_1, t_2, t_3 die Entwickelungen ergeben

$$(79.)\qquad t_\varrho = \tau_\varrho+\tau'_\varrho y+\tau''_\varrho y^2+\cdots$$

und somit nach (76.)

$$x-\alpha = \tau_\varrho y_\varrho^2+\tau'_\varrho y^3+\cdots$$

oder durch Umkehrung, wie verlangt,

$$y_\varrho = \tau_\varrho^{-\frac{1}{2}}(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}+\delta_2(x-\alpha)^{\frac{2}{2}}+\cdots.$$

Da ferner in der Umgebung von $x=\beta$ die Lösungen der Gleichung (74.) die Entwickelung haben sollen

$$y_\varrho = s_{1\varrho}(x-\beta)^{\frac{1}{3}}+s_{2\varrho}(x-\beta)^{\frac{2}{3}}+\cdots,$$

worin die $s_{1\varrho}$ wieder von Null verschieden sein sollen, so wird, da sich

$$x-\beta = s_{1\varrho}^{-3}y_\varrho^3+s'_{4\varrho}y_\varrho^4+\cdots,$$

also

$$u_\varrho = \frac{x-\beta}{y_\varrho^3} = s_{1\varrho}^{-3}+s'_{4\varrho}y_\varrho+\cdots$$

ergiebt, die durch die Substitution

$$x-\beta = y^3 u \tag{80.}$$

transformirte Gleichung (74.) nach Division mit y^6 die Form annehmen

$$\left\{\begin{aligned}&(A_0+A_1y^3u+\cdots)+y^2u(\beta-\alpha+y^3u)(B_0+B_1y^3u+\cdots)\\&+yu(\beta-\alpha+y^3u)(C_0+C_1y^3u+\cdots)+u(\beta-\alpha+y^3u)^2(D_0+D_1y^3u+\cdots)\\&+y^2u^2(\beta-\alpha+y^3u)^2(E_0+E_1y^3u+\cdots)+yu^2(\beta-\alpha+y^3u)^3(F_0+F_1y^3u+\cdots)\\&\qquad\qquad+u^2(\beta-\alpha+y^3u)^3(G_0+G_1y^3u+\cdots) = 0,\end{aligned}\right. \tag{81.}$$

worin A_0 und G_0 der Voraussetzung nach von Null verschieden sind; ergeben sich nun für $y=0$ zwei verschiedene Werthe von u und zwar einfach, hat also die Gleichung

$$G_0(\beta-\alpha)^3u^2+D_0(\beta-\alpha)^2u+A_0 = 0 \tag{82.}$$

zwei verschiedene nicht verschwindende Lösungen — was offenbar immer der Fall sein wird, wenn $D_0=F_3(\beta)=0$ ist oder $F_3(x)$ den Factor $x-\beta$ enthält — so werden sich für die zugehörigen beiden Werthe u_1 und u_2 die Entwickelungen ergeben

$$u_\varrho = \sigma_\varrho+\sigma'_\varrho y+\sigma''_\varrho y^2+\cdots$$

und somit nach (80.)

$$x-\beta = \sigma_\varrho y^3+\sigma'_\varrho y^4+\cdots$$

oder durch Umkehrung, wie verlangt,

$$y_\varrho = \sigma_\varrho^{-\frac{1}{3}}(x-\beta)^{\frac{1}{3}}+\varepsilon_2(x-\beta)^{\frac{2}{3}}+\cdots.$$

Stellt man die soeben gewonnenen Resultate zusammen, berücksichtigt die Bedeutung der Constanten a_0, A_0, ... und bemerkt endlich,

dass die in der angegebenen Weise verzweigten algebraischen Functionen irreductibel sind, da man auf der zugehörigen *Riemann*schen Fläche durch continuirliche Umläufe, ohne durch die Verzweigungspunkte zu gehen, zu allen Werthen der Function gelangen kann, so ergiebt sich der folgende Satz:

Alle 6-deutigen algebraischen, für $x=\alpha$ und $x=\beta$ verschwindenden Functionen, welche durch Gleichungen der Form definirt sind

$$(83.)\quad \begin{cases} F_0(x)y^6+(x-\alpha)(x-\beta)F_1(x)y^5+(x-\alpha)(x-\beta)F_2(x)y^4 \\ \qquad +(x-\alpha)^2(x-\beta)F_3(x)y^3+(x-\alpha)^2(x-\beta)^2F_4(x)y^2 \\ \qquad\qquad +(x-\alpha)^3(x-\beta)^2F_5(x)y+(x-\alpha)^3(x-\beta)^2F_6(x) = 0, \end{cases}$$

worin $F_0(x)$, $F_1(x)$, ..., $F_6(x)$ ganze Functionen von x bedeuten, für welche $F_0(\alpha)$, $F_0(\beta)$, $F_6(\alpha)$, $F_6(\beta)$ von Null verschieden sind und die Gleichungen

$$(84.)\quad (\alpha-\beta)^2F_6(\alpha)t^3+(\alpha-\beta)^2F_4(\alpha)t^2+(\alpha-\beta)F_2(\alpha)t+F_0(\alpha) = 0$$

und

$$(85.)\quad (\beta-\alpha)^3F_6(\beta)u^2+(\beta-\alpha)^2F_3(\beta)u+F_0(\beta) = 0$$

drei, resp. zwei verschiedene Lösungen haben, besitzen Riemannsche Flächen, für welche im Punkte α dreimal je zwei, und im Punkte β zweimal je drei Blätter zusammenhängen, und haben in der Umgebung dieser Punkte Entwickelungen, welche mit den Gliedern $(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}$ resp. $(x-\beta)^{\frac{1}{3}}$ beginnen, und alle diese Functionen sind irreductibel.

Daraus folgt, wenn $F_2(\alpha)$, $F_4(\alpha)$, $F_3(\beta)$ verschwinden, dass

alle 6-deutigen algebraischen Functionen, welche durch Gleichungen von der Form definirt werden

$$(86.)\quad \begin{cases} f_0(x)y^6+(x-\alpha)(x-\beta)f_1(x)y^5+(x-\alpha)^2(x-\beta)f_2(x)y^4 \\ \qquad +(x-\alpha)^2(x-\beta)^2f_3(x)y^3+(x-\alpha)^3(x-\beta)^2f_4(x)y^2 \\ \qquad\qquad +(x-\alpha)^3(x-\beta)^2f_5(x)y+(x-\alpha)^3(x-\beta)^2f_6(x) = 0, \end{cases}$$

worin $f_0(x)$, $f_1(x)$, ..., $f_6(x)$ beliebige ganze Functionen von x bedeuten, für welche nur $f_0(\alpha)$, $f_0(\beta)$, $f_6(\alpha)$ und $f_6(\beta)$ von Null verschieden sein müssen, irreductibel sind,

und zwar werden die 6 Blätter der zugehörigen *Riemann*schen Fläche in der angegebenen Weise zusammenhängen, und die Entwickelungen mit $(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}$, resp. $(x-\beta)^{\frac{1}{3}}$ beginnen.

Die oben ausgesprochene Analogie führt somit auf den Satz:

Jede algebraische Gleichung sechsten Grades von der Form

$$(87.)\quad a_0x^6+pqa_1x^5+p^2qa_2x^4+p^2q^2a_3x^3+p^3q^2a_4x^2+p^3q^2a_5x+p^3q^2a_6 = 0,$$

in welcher p und q zwei verschiedene Primzahlen, $a_0, a_1, \ldots, a_5, a_6$ beliebige ganze Zahlen bedeuten, von denen a_0 und a_6 weder durch p noch durch q theilbar sind, ist irreductibel,

und in der That lässt sich der Beweis dieses Satzes unmittelbar führen, indem man die drei verschiedenen Fälle einer möglichen ganzzahligen Zerlegung einzeln durch Coefficientenvergleichung behandelt.

Nachdem nun die Untersuchung der Irreductibilität für eine sechsdeutige Function mit zwei Verzweigungspunkten durchgeführt worden, wird die Ausdehnung auf eine n-deutige Function nicht schwer sein. Zunächst ist leicht einzusehen, dass, wenn

$$n = \mu.\nu$$

ist, wenn ferner μ und ν relativ prime Zahlen sind, und die n-deutige Function ist so verzweigt, dass in $x=\alpha$ ν-mal je μ Blätter und in $x=\beta$ μ-mal je ν Blätter zusammenhängen, die algebraische Function jedenfalls irreductibel ist, da man durch geschlossene Umläufe, die nicht durch die Verzweigungspunkte führen, zu allen Werthen der n-deutigen Function gelangen kann. Sucht man nun wieder alle diejenigen in $x=\alpha$ und $x=\beta$ verschwindenden n-deutigen Functionen, welche die angegebene Verzweigung haben, und deren Entwickelungen die Anfangsglieder $(x-\alpha)^{\frac{1}{\mu}}$ resp. $(x-\beta)^{\frac{1}{\nu}}$ besitzen, so ergiebt sich durch genau dieselben Betrachtungen, wie sie oben angestellt worden, der folgende Satz:

Alle n-deutigen algebraischen Functionen, welche für $x=\alpha$ und $x=\beta$ n verschwindende Werthe annehmen, für welche, wenn $n=\mu.\nu$ und μ, ν zu einander relativ prime Zahlen sind, im Punkte α ν-mal je μ Blätter, im Punkte β μ-mal je ν Blätter zusammenhängen, und deren Entwickelungen in der Umgebung dieser Punkte mit den Gliedern $(x-\alpha)^{\frac{1}{\mu}}$, resp. $(x-\beta)^{\frac{1}{\nu}}$ beginnen, sind die Lösungen von Gleichungen der Form

$$(88.)\quad \begin{cases} F_0(x)y^n+(x-\alpha)^{\varkappa_\mu^{(1)}}(x-\beta)^{\varkappa_\nu^{(1)}}F_1(x)y^{n-1} \\ +(x-\alpha)^{\varkappa_\mu^{(2)}}(x-\beta)^{\varkappa_\nu^{(2)}}F_2(x)y^{n-2}+\cdots+(x-\alpha)^{\varkappa_\mu^{(n)}}(x-\beta)^{\varkappa_\nu^{(n)}}F_n(x) = 0, \end{cases}$$

worin $F_0(x)$, $F_1(x)$, $\ldots$, $F_n(x)$ ganze Functionen von x bedeuten, für welche $F_0(\alpha)$, $F_0(\beta)$, $F_n(\alpha)$, $F_n(\beta)$ von Null verschieden sind, und die Exponenten $\varkappa_\mu$ und $\varkappa_\nu$ durch die Ausdrücke definirt sind

$$(89.)\qquad \varkappa_\mu^{(\varrho)} = e\left(\frac{\varrho-1}{\mu}\right)+1,\ \varkappa_\nu^{(\varrho)} = e\left(\frac{\varrho-1}{\nu}\right)+1.$$

Es mag hervorgehoben werden, dass $\varkappa_\mu^{(n)} = \nu$ und $\varkappa_\nu^{(n)} = \mu$ ist.

Um nun zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die durch Gleichungen der Form (88.) dargestellten Functionen die oben geforderte Verzweigungsart der zugehörigen *Riemann*schen Fläche und die oben bezeichneten Anfangsglieder ihrer Entwickelungen in der Umgebung der Punkte α und β besitzen, setze man der Substitution (76.) analog

$$(90.)\qquad x-\alpha = y^\mu . t,$$

dividire die so entstehende Gleichung mit y^n, und erkennt dann unmittelbar, dass, wenn die Gleichung νten Grades

$$(91.)\quad \begin{cases} F_{\nu\mu}(\alpha)(\alpha-\beta)^{\varkappa_\nu^{(\nu\mu)}} t^\nu + F_{(\nu-1)\mu}(\alpha)(\alpha-\beta)^{\varkappa_\nu^{((\nu-1)\mu)}} t^{\nu-1} + \cdots \\ \qquad \cdots + F_{2\mu}(\alpha)(\alpha-\beta)^{\varkappa_\nu^{(2\mu)}} t^2 + F_\mu(\alpha)(\alpha-\beta)^{\varkappa_\nu^{(\mu)}} t + F_0(\alpha) = 0 \end{cases}$$

ν verschiedene, nicht verschwindende Lösungen hat — was offenbar immer der Fall ist, wenn

$$(92.)\qquad F_\mu(\alpha) = F_{2\mu}(\alpha) = \cdots = F_{(\nu-1)\mu}(\alpha) = 0$$

ist, da $F_0(\alpha)$ und $F_{\mu\nu}(\alpha)$ als von Null verschieden vorausgesetzt werden — die Entwickelungen der n Werthe von y mit $(x-\alpha)^{\frac{1}{\mu}}$ beginnen; und ebenso wird die Substitution

$$(93.)\qquad x-\beta = y^\nu . u$$

erkennen lassen, dass, wenn die Gleichung

$$(94.)\quad \begin{cases} F_{\mu\nu}(\beta)(\beta-\alpha)^{\varkappa_\mu^{(\mu\nu)}} u^\mu + F_{(\mu-1)\nu}(\beta)(\beta-\alpha)^{\varkappa_\mu^{((\mu-1)\nu)}} u^{\mu-1} + \cdots \\ \qquad \cdots + F_{2\nu}(\beta)(\beta-\alpha)^{\varkappa_\mu^{(2\nu)}} u^2 + F_\nu(\beta)(\beta-\alpha)^{\varkappa_\mu^{(\nu)}} u + F_0(\beta) = 0 \end{cases}$$

μ verschiedene, nicht verschwindende Lösungen hat — was wieder stets der Fall sein wird, wenn

$$(95.)\qquad F_\nu(\beta) = F_{2\nu}(\beta) = \cdots = F_{(\mu-1)\nu}(\beta) = 0$$

ist, da $F_0(\beta)$ und $F_{\mu\nu}(\beta)$ von Null verschieden sein sollten — die Entwickelungen von y in der Umgebung des Punktes β mit dem Gliede $(x-\beta)^{\frac{1}{\nu}}$ anfangen.

Daraus ergiebt sich somit der folgende Satz:

Alle n-deutigen algebraischen, für $x = \alpha$ und $x = \beta$ verschwindenden

Functionen, welche durch Gleichungen der Form definirt sind

$$F_0(x)y^n+(x-\alpha)^{\varkappa_\mu^{(1)}}(x-\beta)^{\varkappa_\nu^{(1)}}F_1(x)y^{n-1}+(x-\alpha)^{\varkappa_\mu^{(2)}}(x-\beta)^{\varkappa_\nu^{(2)}}F_2(x)y^{n-2}+\cdots$$
$$\cdots+(x-\alpha)^{\varkappa_\mu^{(n)}}(x-\beta)^{\varkappa_\nu^{(n)}}F_n(x) = 0,$$

worin $n=\mu.\nu$ *ist, ferner* μ *und* ν *relativ prim zu einander sind,*

$$\varkappa_\mu^{(\varrho)} = e\Big(\frac{\varrho-1}{\mu}\Big)+1, \quad \varkappa_\nu^{(\varrho)} = e\Big(\frac{\varrho-1}{\nu}\Big)+1$$

ist, $F_0(x)$, $F_1(x)$, $\ldots$, $F_n(x)$ *ganze Functionen von* x *bedeuten, für welche* $F_0(\alpha)$, $F_n(\alpha)$, $F_0(\beta)$, $F_n(\beta)$ *von Null verschieden sind, und die Gleichungen*

$$F_{\nu\mu}(\alpha)(\alpha-\beta)^{\varkappa_\nu^{(\nu\mu)}}t^\nu+F_{(\nu-1)\mu}(\alpha)(\alpha-\beta)^{\varkappa_\nu^{((\nu-1)\mu)}}t^{\nu-1}+\cdots$$
$$\cdots+F_{2\mu}(\alpha)(\alpha-\beta)^{\varkappa_\nu^{(2\mu)}}t^2+F_\mu(\alpha)(\alpha-\beta)^{\varkappa_\nu^{(\mu)}}t+F_0(\alpha) = 0$$

und

$$F_{\mu\nu}(\beta)(\beta-\alpha)^{\varkappa_\mu^{(\mu\nu)}}u^\mu+F_{(\mu-1)\nu}(\beta)(\beta-\alpha)^{\varkappa_\mu^{((\mu-1)\nu)}}u^{\mu-1}+\cdots$$
$$\cdots+F_{2\nu}(\beta)(\beta-\alpha)^{\varkappa_\mu^{(2\nu)}}u^2+F_\nu(\beta)(\beta-\alpha)^{\varkappa_\mu^{(\nu)}}u+F_0(\beta) = 0$$

ν, *resp.* μ *verschiedene Lösungen haben, besitzen Riemannsche Flächen, für welche im Punkte* α ν*-mal je* μ*, und im Punkte* β μ*-mal je* ν *Blätter zusammenhängen, und haben in der Umgebung dieser Punkte Entwickelungen, welche mit den Gliedern* $(x-\alpha)^{\frac{1}{\mu}}$ *resp.* $(x-\beta)^{\frac{1}{\nu}}$ *beginnen, und alle diese Functionen sind irreductibel.*

Daraus folgt, wenn

$$F_\mu(\alpha) = F_{2\mu}(\alpha) = \cdots = F_{(\nu-1)\mu}(\alpha) = 0, \quad F_\nu(\beta) = F_{2\nu}(\beta) = \cdots = F_{(\mu-1)\nu}(\beta) = 0,$$

dass

alle n-deutigen algebraischen Functionen, welche durch Gleichungen von der Form definirt werden

$$(96.)\quad \begin{cases} f_0(x)y^n+(x-\alpha)^{\varkappa_\mu^{(1)}+\left(\frac{1}{\mu}\right)}(x-\beta)^{\varkappa_\nu^{(1)}+\left(\frac{1}{\nu}\right)}f_1(x)y^{n-1} \\ \qquad +(x-\alpha)^{\varkappa_\mu^{(2)}+\left(\frac{2}{\mu}\right)}(x-\beta)^{\varkappa_\nu^{(2)}+\left(\frac{2}{\nu}\right)}f_2(x)y^{n-2}+\cdots \\ \qquad \cdots+(x-\alpha)^{\varkappa_\mu^{(n-1)}+\left(\frac{n-1}{\mu}\right)}(x-\beta)^{\varkappa_\nu^{(n-1)}+\left(\frac{n-1}{\nu}\right)}f_{n-1}(x)y \\ \qquad\qquad +(x-\alpha)^{\varkappa_\mu^{(n)}}(x-\beta)^{\varkappa_\nu^{(n)}}f_n(x) = 0, \end{cases}$$

worin** $f_0(x)$, $f_1(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$ **beliebige ganze Functionen von** x **bedeuten, für welche nur** $f_0(\alpha)$, $f_n(\alpha)$, $f_0(\beta)$, $f_n(\beta)$ **von Null verschieden sein müssen, und das Symbol** $\left(\frac{r}{s}\right)$ **die Einheit oder Null bedeutet, je nachdem** r **durch** s **theilbar oder nicht theilbar ist, sind irreductibel,

und zwar werden die n Blätter der zugehörigen *Riemann*schen Fläche in der angegebenen Weise zusammenhängen, und die Entwickelungen mit $(x-\alpha)^{\frac{1}{\mu}}$, resp. $(x-\beta)^{\frac{1}{\nu}}$ beginnen.

Die oben ausgesprochene Analogie führt somit auf den Satz:

Jede algebraische Gleichung** n**ten Grades von der Form

$$(97.)\quad \begin{cases} a_0 x^n + p^{\varkappa_\mu^{(1)}+\left(\frac{1}{\mu}\right)} q^{\varkappa_\nu^{(1)}+\left(\frac{1}{\nu}\right)} a_1 x^{n-1} + p^{\varkappa_\mu^{(2)}+\left(\frac{2}{\mu}\right)} q^{\varkappa_\nu^{(2)}+\left(\frac{2}{\nu}\right)} a_2 x^{n-2} + \cdots \\ \qquad \cdots + p^{\varkappa_\mu^{(n-1)}+\left(\frac{n-1}{\mu}\right)} q^{\varkappa_\nu^{(n-1)}+\left(\frac{n-1}{\nu}\right)} a_{n-1} x + p^{\varkappa_\mu^{(n)}} q^{\varkappa_\nu^{(n)}} a_n = 0, \end{cases}$$

in welcher** $n = \mu.\nu$, μ **und** ν **relative Primzahlen,** p **und** q **zwei verschiedene Primzahlen,** a_0, a_1, $\ldots$, a_n **beliebige ganze Zahlen, von denen nur** a_0 **und** a_n **weder durch** p **noch durch** q **theilbar sind,** $\varkappa_\mu^{(\varrho)} = e\left(\frac{\varrho-1}{\mu}\right)+1$, $\varkappa_\nu^{(\varrho)} = e\left(\frac{\varrho-1}{\nu}\right)+1$, **also** $\varkappa_\mu^{(n)} = \nu$, $\varkappa_\nu^{(n)} = \mu$ **ist, endlich das Symbol** $\left(\frac{r}{s}\right)$ **die Einheit oder Null bedeutet, je nachdem** r **durch** s **theilbar oder nicht theilbar, ist irreductibel.

Der Beweis muss wieder durch Zerlegung geführt werden.

Zur Irreductibilität der n-deutigen algebraischen Function, welche eine *Riemann*sche Fläche besitzt, in welcher im Punkte α ν-mal je μ Blätter und im Punkte β μ-mal je ν Blätter zusammenhängen, ist es offenbar nicht nöthig, dass die Entwickelungen in den Umgebungen der Punkte α und β mit den Gliedern $(x-\alpha)^{\frac{1}{\mu}}$ resp. $(x-\beta)^{\frac{1}{\nu}}$ beginnen, dieselben können mit $(x-\alpha)^{\frac{r}{\mu}}$ resp. $(x-\beta)^{\frac{s}{\nu}}$, wo auch die r und s für die verschiedenen Cyklen verschiedene Werthe annehmen können, jedoch r zu μ und s zu ν relativ prim sind, anfangen; und es würden sich dann Verallgemeinerungen der eben aufgestellten Sätze der Form der Gleichung (43.) entsprechend ergeben, die sich, wie man sieht, ohne Schwierigkeit entwickeln lassen.

Endlich ist leicht zu sehen, dass jede n-deutige algebraische Function, welche für $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$, $\ldots$, $x = \alpha_\varrho$ n verschwindende Werthe annimmt, für welche, wenn $n = \mu_1.\mu_2\ldots\mu_\varrho$ und μ_1, μ_2, $\ldots$, μ_ϱ zu je zweien

relativ prim sind, im Punkte $x = \alpha_\delta$ $\frac{n}{\mu_\delta}$-mal je μ_δ Blätter zusammenhängen, irreductibel ist, und es werden sich somit, nachdem die Form der diese Functionen definirenden Gleichungen nach den oben angegebenen Principien aufgestellt worden, die zugehörigen algebraischen Zahlengleichungen ergeben, deren Coefficienten aus Producten von Potenzen beliebig vieler verschiedener Primzahlen zusammengesetzt sind, und deren Irreductibilität hiernach festgestellt wird.

Heidelberg, 26. October 1894.

Zur Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen.

(Von Herrn *A. Gutzmer.*)

Die folgenden Bemerkungen beziehen sich auf die Iteration linearer homogener Differentialgleichungen und bilden eine Ergänzung der Notiz, welche ich vor einigen Jahren über diesen Gegenstand veröffentlicht habe*).

1. Es ist daselbst**) u. A. der Satz hergeleitet worden: Ist eine lineare homogene Differentialgleichung $m$ter Ordnung aus der linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(1.)\qquad p_0 y' + p_1 y = 0$$

durch Iteration, d. h. Composition der letzteren mit sich selbst, entstanden, so besitzt sie die Integrale

$$y_1 = e^{-\int \frac{p_1}{p_0} dx}, \quad y_2 = y_1 \int \frac{dx}{p_0}, \quad y_3 = y_1 \left[\int \frac{dx}{p_0}\right]^2, \quad \dots, \quad y_m = y_1 \left[\int \frac{dx}{p_0}\right]^{m-1},$$

und umgekehrt.

Ferner habe ich nachgewiesen, dass jede beliebige lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(2.)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + q_1 \frac{dy}{dx} + q_2 y = 0$$

als Iteration einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung (1.) dargestellt werden kann; und zwar bestehen zwischen den Coefficienten p und q in diesem Falle die Beziehungen:

$$(3.)\qquad q_1 = \frac{p_0' + 2p_1}{p_0}, \quad q_2 = \frac{p_1^2 + p_0 p_1'}{p_0^2}.$$

Von diesen Sätzen werden wir Gebrauch machen.

---

*) Bemerkungen über die Iteration linearer homogener Differentialgleichungen. Sitzungsberichte der Königl. Böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. Jahrgang 1892, S. 54—59. Vorgelegt am 20. November 1891.

**) a. a. O. S. 56.

2. Bekanntlich genügt die $n$te Potenz des Integrals der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung (2.) einer linearen homogenen Differentialgleichung $(n+1)$-ter Ordnung, deren Coefficienten rationale Functionen von q_1 und q_2 und deren Ableitungen sind. Wir wollen nun untersuchen, ob bezw. wann die Differentialgleichung $(n+1)$-ter Ordnung, welcher die $n$te Potenz des Integrals von (2.) genügt, als Iteration einer Differentialgleichung erster Ordnung der Form (1.) dargestellt werden kann. Bevor wir diese Betrachtung allgemein darlegen, wollen wir sie an den Differentialgleichungen dritter bezw. vierter Ordnung durchführen, denen das Quadrat bezw. der Kubus des Integrals der Differentialgleichung (2.) genügt.

3. Sind η_1, η_2 zwei linear unabhängige Integrale der Differentialgleichung (2.), so bilden

$$\eta_1^2, \quad \eta_1\eta_2, \quad \eta_2^2$$

bekanntlich drei linear unabhängige Integrale der Differentialgleichung dritter Ordnung*)

$$(4.)\qquad y'''+3q_1y''+(2q_1^2+q_1'+4q_2)y'+(4q_1q_2+2q_2')y \;=\; 0.$$

Wenn diese Gleichung Iteration einer Differentialgleichung erster Ordnung der Form (1.) sein soll, so müssen ihre Integrale nach dem in Nr. 1 angegebenen Satze die Form

$$y_1 = P, \quad y_2 = PQ, \quad y_3 = PQ^2$$

haben, wo zur Abkürzung

$$P = e^{-\int\frac{p_1}{p_0}dx}, \quad Q = \int\frac{dx}{p_0}$$

gesetzt worden ist. Wir haben also zwei verschiedene Formen für die Integrale von (4.). Setzen wir nun

$$y_1 = \eta_1^2 = P, \quad y_2 = \eta_1\eta_2 = PQ, \quad y_3 = \eta_2^2 = PQ^2,$$

so ergeben sich für η_1 und η_2 die Ausdrücke:

$$\eta_1 = P^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}\int\frac{p_1}{p_0}dx}, \quad \eta_2 = P^{\frac{1}{2}}Q = e^{-\frac{1}{2}\int\frac{p_1}{p_0}dx}\int\frac{dx}{p_0},$$

und aus dieser Form der Integrale η_1 und η_2 erkennt man unmittelbar nach

*) Vgl. *Fuchs*, Acta Mathematica I, S. 333.

dem in Nr. 1 angegebenen Satze, dass die Differentialgleichung (2.) eine Iteration derjenigen Differentialgleichung erster Ordnung sein muss, welche aus (1.) hervorgeht, wenn darin p_1 durch $\frac{1}{2}p_1$ ersetzt wird. Diese Bedingung legt aber der Gleichung (2.) gar keine Beschränkung auf, denn nach dem in Nr. 1 angeführten Satze lässt sich *jede* lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung als Iteration einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung darstellen. Mithin ist auch die Differentialgleichung dritter Ordnung (4.) stets Iteration einer Differentialgleichung erster Ordnung. Nimmt man (1.) als die Differentialgleichung an, deren Iteration die Gleichung (2.) liefert, so kann man das gewonnene Resultat mithin in folgenden *Satz* kleiden:

Die Differentialgleichung dritter Ordnung, welcher das Quadrat des Integrals einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt, ist die Iteration einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung; und zwar unterscheidet sich die letztere von derjenigen, deren Iteration die Differentialgleichung zweiter Ordnung liefert, nur dadurch, dass in ihr der Coefficient von y mit dem Factor 2 *multiplicirt ist.*

Man kann diesen Satz leicht verificiren. Setzt man nämlich einerseits in die Gleichung (4.) für q_1 und q_2 die unter (3.) angegebenen Ausdrücke ein, und bildet man andererseits die zweite Iteration der Differentialgleichung

$$p_0 y' + 2p_1 y = 0,$$

so erhält man in beiden Fällen übereinstimmend die Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$\begin{aligned} p_0^3 y''' + 3p_0^2(2p_1 + p_0')y'' + p_0(p_0'^2 + p_0 p_0'' + 6p_0' p_1 + 6p_0 p_1' + 12p_1^2)y' \\ + 2(p_0 p_0' p_1' + p_0^2 p_1'' + 6p_0 p_1 p_1' + 4p_1^3)y = 0. \end{aligned}$$

4. Stellt man dieselbe Betrachtung für die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$(5.) \quad \left\{ \begin{aligned} y^{IV} + 6q_1 y''' + (11q_1^2 + 4q_1' + 10q_2)y'' + (6q_1^3 + 30q_1 q_2 + 7q_1 q_1' + 10q_2' + q_1'')y' \\ + (18q_1^2 q_2 + 9q_2^2 + 6q_1' q_2 + 15q_1 q_2' + 3q_2'')y = 0 \end{aligned} \right.$$

an, welcher der Cubus des Integrals der Differentialgleichung (2.) genügt*), so erkennt man, dass die Gleichung (5.) übereinstimmt mit der durch Itera-

*) Vgl. *Brioschi,* Bulletin de la Société Mathématique de France, t. VII. 1879. *Appell,* Annales de l'École Normale Supérieure 1881, § XV, éq. (25).

tion aus der Differentialgleichung erster Ordnung

$$p_0 y' + 3p_1 y = 0$$

sich ergebenden Gleichung vierter Ordnung. In der That erhält man sowohl durch Iteration der letzteren Gleichung als auch, wenn man für q_1 und q_2 die in (3.) angegebenen Ausdrücke in (5.) einsetzt, die Gleichung:

$$\begin{aligned} & p_0^4 y^{IV} + 6p_0^3(2p_1+p_0')y''' + p_0^2(54p_1^2+36p_0'p_1+7p_0'^2+18p_0p_1'+4p_0p_0'')y'' \\ & +p_0(54p_0'p_1^2+108p_1^3+12p_0'^2p_1+12p_0p_0''p_1+108p_0p_1p_1'+30p_0p_0'p_1' \\ & +p_0'^3+4p_0p_0'p_0''+p_0^2p_0'''+12p_0^2p_1'')y' \\ & +3(27p_1^4+54p_0p_1^2p_1'+12p_0p_0'p_1p_1'+12p_0^2p_1p_1''+9p_0^2p_1'^2+p_0p_0'^2p_1' \\ & +p_0^2p_0''p_1'+3p_0^2p_0'p_1''+p_0^3p_1''')y = 0. \end{aligned}$$

5. Wird nun allgemein die Gleichung $(n+1)$ter Ordnung betrachtet, welcher die $n$te Potenz des Integrals der Differentialgleichung (2.) genügt, so muss dieselbe folgende linear unabhängige Integrale besitzen:

$$\eta_1^n, \quad \eta_1^{n-1}\eta_2, \quad \eta_1^{n-2}\eta_2^2, \quad \ldots, \quad \eta_2^n.$$

Andererseits müssen ihre Integrale, wenn sie Iteration einer Differentialgleichung erster Ordnung sein soll, die Form

$$y_1 = P, \quad y_2 = PQ, \quad y_3 = PQ^2, \quad \ldots, \quad y_{n+1} = PQ^n$$

haben. Setzt man nun

$$y_1 = \eta_1^n, \quad y_2 = \eta_1^{n-1}\eta_2, \quad y_3 = \eta_1^{n-2}\eta_2^2, \quad \ldots, \quad y_{n+1} = \eta_2^n,$$

so ergiebt sich

$$\eta_1 = P^{\frac{1}{n}}, \quad \eta_2 = P^{\frac{1}{n}} Q,$$

und man ersieht daraus unmittelbar, dass die Differentialgleichung $(n+1)$ter Ordnung durch Iteration aus der Gleichung erster Ordnung

$$p_0 y' + n p_1 y = 0$$

hervorgeht. Also in Uebereinstimmung mit den Nummern 3 und 4:

Die Differentialgleichung $(n+1)$ter Ordnung, welcher die $n$te Potenz des Integrals einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt, ist als Iteration einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung darstellbar; und zwar unterscheidet sich die letztere von derjenigen, deren Iteration die Differentialgleichung zweiter Ordnung liefert, nur dadurch, dass in ihr der Coefficient von y mit dem Factor n multiplicirt ist.

Kennt man also die Differentialgleichung erster Ordnung, deren Iteration gleich einer vorgelegten Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, so kann man durch blosse Iteration einer aus jener einfach zu bildenden Differentialgleichung erster Ordnung die Differentialgleichung bilden, welcher eine vorgeschriebene Potenz des Integrals der Gleichung zweiter Ordnung genügt. Zugleich kann man unmittelbar ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung anschreiben.

Die Differentialgleichungen zweiter Ordnung und diejenigen höherer Ordnung, welche durch eine Potenz des Integrals einer Differentialgleichung zweiter Ordnung befriedigt werden, bilden also eine Klasse von Differentialgleichungen, welche stets durch Iteration aus Differentialgleichungen erster Ordnung gebildet werden können.

Man kann das Ergebniss auch in der folgenden Weise aussprechen:

Bildet man die Iterationen der Differentialgleichung erster Ordnung

$$p_0 y' + p_1 y = 0,$$

so erhält man stets lineare homogene Differentialgleichungen, welchen die Potenzen des Integrals von gewissen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung genügen; und zwar wird die auf dem angegebenen Wege gefundene Differentialgleichung $(n+1)$*ter Ordnung durch die* n*te Potenz des Integrals derjenigen Differentialgleichung zweiter Ordnung befriedigt, welche durch Iteration aus der Gleichung erster Ordnung*

$$np_0 y' + p_1 y = 0$$

hervorgeht.

Mit diesem Satze ist die Natur derjenigen linearen homogenen Differentialgleichungen, auf welche die Iterationen einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung führen, bestimmt.

6. Wir bemerken noch Folgendes. Es könnte nach dem in Nr. 1 angegebenen Satze, dass jede lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung als Iteration einer solchen Gleichung erster Ordnung dargestellt werden kann, der Anschein erweckt werden, als ob mit dem vorstehenden Ergebniss zugleich die Betrachtung der Iterationen der Gleichung (2.) erledigt sei. Das ist aber nicht der Fall. Es hängt dies mit dem Umstande zusammen, dass das Iterationsresultat, wie wir bereits früher hervorgehoben

haben*), verschieden ausfällt, je nachdem in der zu iterirenden Gleichung der Coefficient der höchsten Ableitung gleich Eins ist oder einen davon verschiedenen Werth hat; (genauer gesagt, je nachdem dieser Coefficient eine Constante oder eine Function der Unabhängigen ist). In der Gleichung (2.) ist jener Coefficient gleich Eins; in der Gleichung, welche man aus (1.) durch einmalige Iteration erhält**), ist der Coefficient der höchsten Ableitung dagegen gleich p^2. Bildet man daher die Iteration der Gleichung (2.) und setzt in das Iterationsresultat für q_1 und q_2 die Ausdrücke (3.) ein, so erhält man nicht dieselbe Gleichung wie durch die Iteration der Gleichung (1.) bis zur vierten Ordnung. Die Iterationen der Differentialgleichungen zweiter Ordnung erfordern also eine besondere Behandlung, auf welche wir uns vorbehalten zurückzukommen.

Buckow, Märk. Schweiz, Anfang August 1894.

---

*) Vgl. a. a. O. S. 55.

**) Diese Gleichung lautet: $p_0^2 y'' + p_0(p_0' + 2p_1)y' + (p_1^2 + p_0 p_1')y = 0$.

Elementarer Beweis des Satzes, dass in jeder unbegrenzten arithmetischen Progression $my+1$ unendlich viele Primzahlen vorkommen.

(Von Herrn *E. Wendt* in Berlin.)

Der Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression $ax+b$, in der das Anfangsglied a und die Differenz b theilerfremd sind, unendlich viele Primzahlen enthält, ist von *Dirichlet* in einer der Berliner Akademie im Jahre 1837 vorgelegten Arbeit gegeben worden und hat seitdem keine wesentlichen Vereinfachungen erfahren. Derselbe beruht auf sehr schwierigen Grundlagen. Daher wird es, wie ich glaube, erwünscht sein, einen einfachen Beweis eines Theiles des Satzes, nämlich für $b=1$, zu kennen.

Es sei m eine beliebige positive ganze Zahl, nur grösser als Eins. Man betrachte die Reihe der unendlich vielen Zahlen

$$z = x^m - 1,$$

wo x alle ganzen Zahlen durchläuft. Es sei α eine primitive Wurzel der Gleichung $\alpha^m = 1$; ξ sei eine unbestimmte Variable. Dann zerfällt $\xi^m - 1$ in das Product der beiden Factoren:

$$f(\xi) = \prod_{(r)} (\xi-\alpha^r) = \xi^{\varphi(m)} + A_1 \xi^{\varphi(m)-1} + \cdots + A_{\varphi(m)-1}\xi + A_{\varphi(m)},$$
$$g(\xi) = \prod_{(t)} (\xi-\alpha^t) = \xi^{m-\varphi(m)} + a_1 \xi^{m-\varphi(m)-1} + \cdots + a_{m-\varphi(m)-1}\xi + a_{m-\varphi(m)},$$

wo r alle $\varphi(m)$ zu m relativ primen, unter m gelegenen Zahlen und t alle die unter m gelegenen Zahlen durchläuft, welche mit m einen echten Theiler gemeinsam haben (m eingeschlossen, 1 ausgeschlossen), und wo $A_1, \ldots, A_{\varphi(m)}$, $a_1, \ldots, a_{m-\varphi(m)}$ ganze Zahlen bezeichnen, die bestimmt sind, wenn m gegeben ist.

Die Functionen $f(\xi)$ und $g(\xi)$ der *Variablen* ξ sind bekanntlich theilerfremd. Es fragt sich nun, ob sie es auch sind, wenn man für ξ eine ganze Zahl x setzt.

Angenommen, $f(x)$ und $g(x)$ haben den Primtheiler n gemeinsam; es mögen also gleichzeitig die Congruenzen bestehen:

$$f(x) \equiv x^{\varphi(m)} + A_1 x^{\varphi(m)-1} + \cdots + A_{\varphi(m)-1} x + A_{\varphi(m)} \equiv 0,$$
$$g(x) \equiv x^{m-\varphi(m)} + a_1 x^{m-\varphi(m)-1} + \cdots + a_{m-\varphi(m)-1} x + a_{m-\varphi(m)} \equiv 0 \pmod{n}.$$

Wenn dies möglich sein soll, muss bekanntlich die Resultante R der rationalen Functionen $f(\xi)$ und $g(\xi)$ durch n theilbar sein. Dieselbe ist eine ganze Zahl, die nur von den Coefficienten $a_1, \ldots, a_{m-\varphi(m)}, A_1, \ldots, A_{\varphi(m)}$ abhängt, d. h. durch den Exponenten m bestimmt ist, von der Zahl x aber nicht abhängt und deswegen von Null verschieden ist, weil die Gleichungen $f(\xi) = 0$ und $g(\xi) = 0$ keine gemeinsame Wurzel haben.

Wenn nun der absolute Betrag von R von Eins verschieden ist, so werden also $f(x)$ und $g(x)$ für $x = R^k$, wo k irgend eine positive ganze Zahl bedeutet, relativ prim sein. Denn angenommen, diese beiden Zahlen hätten einen gemeinsamen Primtheiler, so müsste dieser, wie eben bewiesen, in R, andererseits aber auch in dem Producte

$$f(R^k).g(R^k) = (R^k)^m - 1$$

enthalten sein. Das aber ist nicht möglich, weil die Zahlen $(R^k)^m - 1$ und R keinen gemeinsamen Divisor besitzen können. Sollte aber $R = \pm 1$ sein*), so sind $f(x)$ und $g(x)$ für jeden die Eins übersteigenden Werth von x theilerfremd. In jedem Falle giebt es mithin eine unendlich grosse Anzahl von Zahlen x von der Beschaffenheit, dass $f(x)$ und $g(x)$ keinen gemeisamen Divisor haben.

Es seien nun z. B. $f(x')$ und $g(x')$ theilerfremd. Ferner sei $f(x')$ von Null und ± 1 verschieden. Dies kann man voraussetzen, da jede der algebraischen Gleichungen

$$f(\xi) = 1, \quad f(\xi) = -1$$

überhaupt nur $\varphi(m)$ Wurzeln ξ hat, da ferner $f(x)$ ein Theiler von $x^m - 1$

---

*) In Wirklichkeit kann dieser Fall nie eintreten.

ist und diese letztere Zahl nur für $x = 1$ verschwindet. Dann hat also $f(x')$ einen Primtheiler q_1, welcher in $g(x')$ nicht enthalten ist, mithin in keiner Zahl $x'^{\mu}-1$ aufgeht, wo μ ein Divisor von m ist, da $g(x')$ durch alle Zahlen von dieser Form theilbar ist. Dann kann aber auch q_1 in keiner Zahl $x'^{\mu'}-1$ aufgehen, wo $\mu' < m$ ist, d. h. m ist die kleinste Zahl für welche

$$x'^{m} \equiv 1 \pmod{q_1}$$

ist. Nach dem *Fermat*schen Satze hat aber die Congruenz statt

$$x'^{q_1-1} \equiv 1 \pmod{q_1},$$

folglich muss q_1-1 durch m theilbar sein, d. h. q_1 hat die Form

$$q_1 = mk+1.$$

Es ist somit bis jetzt folgender Satz bewiesen:

Wenn m eine willkürlich gegebene positive ganze Zahl ist, so giebt es stets eine Primzahl von der Form $q_1 = mk+1$. (Die bisher gemachte Annahme, dass m nicht gleich 1 sei, kann man nun offenbar fallen lassen.)

Zufolge dieses Satzes gehört auch zu mm_1k, wo m_1 eine die Einheit übersteigende positive ganze Zahl bedeuten soll, eine Primzahl

$$q_2 = mm_1kk_1+1,$$

ferner zur Zahl $mm_1m_2kk_1$ eine Primzahl

$$q_3 = mm_1m_2kk_1k_2+1$$

u. s. w. Diese Primzahlen $q_1, q_2, q_3, \ldots$ sind alle unter einander verschieden, weil die folgende stets grösser als die vorhergehende ist, und haben alle die Form $my+1$. Mithin gilt der Satz:

In jeder unbegrenzten arithmetischen Progression $my+1$, wo die Differenz m eine gegebene positive ganze Zahl bedeutet, sind unendlich viele Primzahlen enthalten.

Man kann den Beweis auch ohne Zuhülfenahme der Resultante R und der Grösse α führen, indem man von dem Satze Gebrauch macht, nach welchem die Zahlen $\frac{u^p-1}{u-1}$ und $u-1$, wobei p eine Primzahl bedeutet, ent-

weder theilerfremd sind oder den grössten gemeinschaftlichen Divisor p besitzen. Man zeigt dann, dass, wenn m die Form

$$m = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_\varrho^{l_\varrho}$$

hat, ein etwaiger gemeinschaftlicher Theiler von $x^m - 1$ und $x^\mu - 1$, wo μ irgend ein Divisor von m ist, nur die Primdivisoren $p_1, p_2, \dots, p_\varrho$ besitzen kann. Demzufolge hat man nur die Zahlen

$$((p_1 p_2 \dots p_\varrho)^k)^m - 1$$

zu betrachten, um die Richtigkeit des hier zu beweisenden Satzes einzusehen.

Berlin, im August 1894.

Anmerkung. Auf die Arbeiten von *Lebesgue* (*Liouville*'s Journal Série I Bd. 8 und *Serret* (Bd. 17) bin ich erst nachträglich durch meinen Freund *Vahlen* aufmerksam gemacht worden.

Zur Integration derjenigen Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Coefficienten unabhängige, unbestimmte Functionen der unabhängigen Veränderlichen sind.

(Von Herrn *G. Bohlmann* in Göttingen.)

Die folgenden Zeilen bringen eine Ergänzung und Verallgemeinerung meiner Arbeit: „Zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung mit unbestimmten Coefficienten"*). Wenn im Folgenden auf diesen Aufsatz Bezug genommen wird, soll er kurz mit A. citirt werden.

In der genannten Arbeit stellte ich mir das Problem (cf. pag. 211), alle diejenigen Differentialgleichungen erster Ordnung anzugeben, welche eine Integralgleichung besitzen für Coefficienten, die unabhängige, unbestimmte Functionen der willkürlich Veränderlichen sind.

Die nachstehenden Entwickelungen lösen die analoge Aufgabe für ein System von n simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung. Sie benutzen dabei die Sätze, welche im zweiten Abschnitte von A.**) aufgestellt wurden. Es ist daher der hier eingeschlagene Gedankengang nicht wesentlich von dem im dritten Abschnitte von A.***) verfolgten verschieden. Die hier für den Fall $n = n$ gegebenen Beweise benutzen nie den Inductionsschluss und sind daher unabhängig von den für $n = 1$ gegebenen. Sie bedürfen daher der Resultate des zweiten, nicht aber des dritten Abschnittes von A. Es werden daher die Ergebnisse des letzteren gleichzeitig durch das Folgende noch einmal begründet.

Ich benutze deshalb die Gelegenheit, um die Betrachtungen des dritten Abschnittes von A. noch in einigen Punkten zu vereinfachen, zu

*) Dieses Journal Bd. 113, S. 207—251.
**) A. S. 214 ff.
***) A. S. 237 ff.

vervollständigen und übersichtlicher anzuordnen. Freilich wird in Fällen, wo es sich um nichts weiter als eine mehr oder minder wörtliche Wiederholung von Ueberlegungen aus A. handeln würde, dieselbe unterlassen und auf die entsprechende Stelle in A. verwiesen werden.

Was nun das Ergebniss anlangt, zu welchem die vorliegende Arbeit kommt, so zeigt sich hier nur noch auffälliger der für $n = 1$ schon am Schlusse von A. erkannte Zusammenhang derjenigen Differentialgleichungssysteme, welche sich für unabhängige, unbestimmte Coefficienten integriren lassen, mit denen, welche Fundamentalintegrale besitzen*). Das Resultat ist geradezu:

Diejenigen Differentialgleichungssysteme erster Ordnung, welche sich für unabhängige, unbestimmte Coefficienten integriren lassen, sind identisch mit denjenigen, welche Fundamentalintegrale besitzen; sie haben nämlich genau die von Lie in den Leipziger Berichten 1893 angegebene Form.

1.

Stellung des Problems und Angabe der Lösung desselben.

Ehe wir eine Uebertragung der Entwickelungen von A. auf ein System von gewöhnlichen simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung vornehmen, wird es sich empfehlen, die dort erlangten Resultate kurz und in einer für die Verallgemeinerung geeigneten Form zu recapituliren.

1. *Recapitulation in verallgemeinerungsfähiger Form.* In A. (p. 209) wurde die Definition aufgestellt:

Definition. „Eine Differentialgleichung:

$$(H.) \qquad \frac{dy}{dx} = H(y;\ \eta_1(x),\ \ldots,\ \eta_s(x))$$

besitzt dann für unabhängige, unbestimmte Coefficienten η eine Integralgleichung, wenn bei fester Function H auch eine feste Function Ω existirt, so dass:

$$(\Omega.) \qquad \Omega(x,\ y;\ u_1(x),\ \ldots,\ u_r(x)) = \text{Const.}$$

die Integralgleichung von $(H.)$ wird, welches auch die η für Functionen von x sein mögen; dass also bei einer Aenderung der Functionen η sich wohl die u ändern, nicht aber Ω in seiner Abhängigkeit von $x,\ y;\ u_1,\ \ldots,\ u_r$.“

Unter Zugrundelegung dieser Definition wurde das Problem gestellt (A. p. 211):

*) *Lie,* Ueber Differentialgleichungen, die Fundamentalintegrale besitzen. Leipziger Berichte 1893, S. 341.

Problem: „Alle Differentialgleichungen erster Ordnung aufzustellen, welche für unabhängige, unbestimmte Coefficienten eine Integralgleichung besitzen."

Es fand jedoch eine Beschränkung auf analytische Functionen H, Ω einer endlichen Anzahl von Argumenten η bezw. u statt, wobei jedoch zugelassen wurde, dass die u unter einander durch Differentialgleichungen verbunden sind.

Unter diesen Umständen gab die Lösung des Problems ein Theorem, welches hier diese Fassung erhalten möge:

Theorem: „Damit eine Differentialgleichung erster Ordnung sich für unabhängige, unbestimmte Coefficienten im Sinne der eben angeführten Definition integriren lasse, ist nothwendig und hinreichend, dass sie unter der Form enthalten ist:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{1}^{r}{}_{\alpha}\, \eta_\alpha(x).\xi_\alpha(y),$$

wobei die η unabhängige, unbestimmte Functionen von x, die ξ aber solche feste Functionen von y bedeuten, dass die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$X_\alpha(f) = \xi_\alpha(y)\cdot\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (\alpha = 1, \ldots, r)$$

eine r-gliedrige Gruppe von Transformationen der *einen* Veränderlichen y erzeugen. Ist:

$$\bar{y} = g(y;\, a_1, \ldots, a_r)$$

die endliche Gleichung dieser Gruppe mit den r Parametern $a_1, \ldots, a_r$, so ist:

$$g(y;\, u_1(x), \ldots, u_r(x)) = \text{Const.}$$

die Integralgleichung von (H.), wenn die u unabhängige, unbestimmte Functionen bedeuten."

Indem nun die von *Lie* gegebene Bestimmung aller Gruppen einer Variablen auf den vorliegenden Fall angewandt wurde*), ergaben sich die drei bekannten Typen von Differentialgleichungen, welche in A. mit (1'.), (2'.), (3'.) bezeichnet wurden**), und welche bis zur *Riccati*schen Gleichung aufsteigen.

2. *Aufstellung eines analogen Satzes für den allgemeinen Fall.* Die Ausdehnung der Betrachtungen auf den Fall eines Systems von n totalen

*) A. S. 239.
**) A. S. 207.

simultanen Differentialgleichungen führt zu einem dem vorigen ganz analogen Resultate, welches jetzt angeführt werden soll. Eine beim Uebergang auf den allgemeinen Fall doch nothwendige Aenderung der Bezeichnungsweise möge gleich so eingerichtet werden, dass der Anschluss an die eingangs erwähnte Arbeit von *Lie* gewonnen wird.

Es heisse demnach jetzt z die unabhängige Veränderliche und es seien $x_1, \ldots, x_n$ die abhängigen Variablen. Das Differentialgleichungssystem sei:

$$\frac{dx_i}{dz} = \eta_i(x_1, \ldots, x_n; Z_1(z), \ldots, Z_s(z)); \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$Z_1 \ldots Z_s$ seien wieder unabhängige, unbestimmte Functionen von z — die „Coefficienten" des Systems (welche also in A. η hiessen). Natürlich sollen die Gleichungen so geschrieben sein, dass die Z nicht in einer geringeren Anzahl von Verbindungen in dem Systeme auftreten. Die η_i bedeuten n ganz feste Functionen ihrer $n+s$ Argumente (sie spielen also dieselbe Rolle wie H in A.).

Es ist nun wieder zu definiren:

Definition. „Das Differentialgleichungssystem:

$$(\eta.) \qquad \frac{dx_i}{dz} = \eta_i(x_1, \ldots, x_n; Z_1(z), \ldots, Z_s(z)) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

lässt sich dann für unabhängige, unbestimmte Coefficienten Z integriren, wenn bei festen Functionen $\eta_1, \ldots, \eta_n$ auch n feste Functionen $\omega_1, \ldots, \omega_n$ existiren, so dass:

$$(\omega.) \qquad \omega_i(z; x_1, \ldots, x_n; u_1(z), \ldots, u_r(z)) = c_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

die n Integralgleichungen werden, welches auch die Coefficienten Z für Functionen von z sein mögen; dass also bei einer Aenderung der Z als Functionen von z sich zwar die u als Functionen von z ändern, nicht aber die Functionen ω_i in ihrer Abhängigkeit von den $r+n+1$ Argumenten z, x, u."

Auf Grund dieser Definition stellen wir uns das Problem:

Problem. Es sollen alle Differentialgleichungssysteme:

$$(\eta.) \qquad \frac{dx_i}{dz} = \eta_i(x_1, \ldots, x_n; Z_1(z), \ldots, Z_s(z)) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

angegeben werden, welche sich für unabhängige, unbestimmte Coefficienten Z integriren lassen."

Das Problem ist wieder zu beschränken auf analytische Functionen η bezw. ω von einer endlichen Anzahl von Argumenten Z bezw. u; die η müssen unabhängig sein; die u hingegen dürfen durch Differentialgleichungen verbunden sein.

Ganz analog wie bei $n = 1$ gilt nun auch hier für $n = n$ der Satz:

Theorem. „Damit ein System von n totalen Differentialgleichungen erster Ordnung mit n abhängigen und einer unabhängigen Veränderlichen:

$$\frac{dx_i}{dz} = \eta_i(x_1, \ldots, x_n; Z_1(z), \ldots, Z_s(z)) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

sich für unabhängige, unbestimmte Coefficienten integriren lasse, ist nothwendig und hinreichend, dass es unter der Form enthalten*) ist:

$$\frac{dx_i}{dz} = \sum_1^r {}_j Z_j(z) . \xi_{ji}(x_1, \ldots, x_n), \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

in welcher die Z unabhängige, unbestimmte Functionen von z, die ξ aber festen Functionen der x bedeuten von der Beschaffenheit, dass die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$X_j(f) \equiv \sum_1^n {}_i \xi_{ji}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (j = 1, \ldots, r)$$

eine r-gliedrige Gruppe von Transformationen der n Variablen x erzeugen. Sind:

$$\bar{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r)$$

die endlichen Gleichungen dieser Gruppe mit den r wesentlichen Parametern $a_1, \ldots, a_r$, so ist:

$$f_i(x_1, \ldots, x_n; u_1(z), \ldots, u_r(z)) = c_i$$

das gesuchte System von Integralgleichungen (ω.) des Differentialgleichungssystemes (η.). Um zu finden, wie die Z an die u gebunden sind, löse man die Integralgleichungen nach $x_1, \ldots, x_n$ auf:

$$x_i = f_i(c_1, \ldots, c_n; v_1(z), \ldots, v_r(z)),$$

dann sind:

$$Z_j(z) = \sum_1^r {}_k \psi_{jk}(v_1, \ldots, v_r) \cdot \frac{dv_k}{dz} \qquad (j = 1, \ldots, r)$$

---

*) Genaueres über die *Art* des Enthaltenseins liefert der im zweiten Abschnitte dieser Arbeit in Nr. 4 aufgestellte „Zusatz zu Satz *abc*“.

— die ψ in der bei *Lie* üblichen Bedeutung gebraucht — die gewünschten Gleichungen".

Das vorliegende Theorem führt also die Aufgabe auf das gruppentheoretische Problem zurück alle endlichen Gruppen in n Variablen zu bestimmen. Dasselbe ist bis $n = 3$ vollständig*), darüber hinaus zum Theil gelöst. In demselben Umfange ist es also möglich, alle Systeme der verlangten Beschaffenheit aufzustellen.

2.

Beweis der Richtigkeit der mitgetheilten Lösung.

In den ersten Entwickelungen ist der leitende Gedanke der, dass es nur nöthig ist, alle Typen von Differentialgleichungssystemen nebst den zu ihnen gehörigen Integralgleichungssystemen zu erschöpfen und, wenn möglich, nur dem Aeusseren nach verschiedene Formen unter einer gemeinsamen Gestalt zusammenzufassen. Dabei ist es theoretisch gleichgültig, ob eine solche Aufzählung von den Integralgleichungen oder den Differentialgleichungen ausgeht. Es erscheint praktisch zweckmässiger, das System der Integralgleichungen den Betrachtungen zu Grunde zu legen.

1. *Betrachtung der speciellen Systeme, deren Integralgleichung* ($\omega.$) *nur unabhängige u, und z nur als Argument der u enthalten.* Es sei demnach zunächst ein System von n hinsichtlich $x_1, \ldots, x_n$ unabhängigen Integralgleichungen vorgelegt von der speciellen Form:

$$(\omega.) \qquad \omega_i(x_1, \ldots, x_n;\ u_1(z), \ldots, u_r(z)) = c_i, \qquad (i=1, \ldots, n)$$

in welchem die ω_i vorläufig beliebige, aber feste analytische Functionen ihrer Argumente bedeuten mögen, ohne Rücksicht darauf, ob die Coefficienten des zugehörigen Systemes von Differentialgleichungen ($\eta.$) unabhängige Unbestimmte werden oder nicht. Dagegen seien die unbestimmten Functionen $u_1, \ldots, u_r$ unabhängige, d. h. durch keine Differentialgleichungen nullter oder höherer Ordnung verbundene, unbestimmte Functionen von z. Natürlich ist die Schreibweise der Gleichungen ($\omega.$) so einzurichten, dass die u auch nicht in einer geringeren Anzahl als r Verbindungen in dem Systeme vorkommen.

Die Differentiation der Gleichungen ($\omega.$) nach z liefert nun n lineare

*) Vergl. z. B. *Lie-Engel,* Transformationsgruppen III. Leipzig 1893.

Gleichungen für die Differentialquotienten $\frac{dx_k}{dz}$:

$$\sum_1^n{}_k \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} \cdot \frac{dx_k}{dz} = -\sum_1^r{}_j \frac{\partial \omega_i}{\partial u_j} \cdot u_j'. \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Wie in A. so bedeuten auch hier, wenn nichts anderes bemerkt ist, die Accente Ableitungen nach der unabhängig Veränderlichen, also hier z.

Die Determinante:

$$\left| \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} \right| \qquad (i, k = 1, \ldots, n)$$

verschwindet offenbar nicht identisch, da die n Gleichungen $(\omega.)$ ja hinsichtlich $x_1, \ldots, x_n$ von einander unabhängig sein sollten. Also lassen sich die n Gleichungen für die $\frac{dx_k}{dz}$ nach den n Differentialquotienten $\frac{dx_k}{dz}$ auflösen. Diese werden mithin ganz bestimmte Functionen von den x_i, den u_j und den u_j'. Die Grössen u, u' mögen nun gerade in s „verschiedenen"*) Verbindungen Z in den für die $\frac{dx_k}{dz}$ erhaltenen Ausdrücken vorkommen:

$$Z_j = \mathfrak{f}_j(u_1, \ldots, u_r;\ u_1', \ldots, u_r'), \qquad (j = 1, \ldots, s)$$

so dass die Z in der Terminologie von A. als Differentialfunctionen**) erster Ordnung der r Unbestimmten u:

$$(\mathfrak{f}.) \qquad Z_j = \mathfrak{f}_j(u_1, \ldots, u_r)_1 \qquad (j = 1, \ldots, s)$$

zu bezeichnen sind.

Auf die Gleichungen (f.) ***sind mithin sämmtliche Entwickelungen des zweiten Abschnittes von*** A. ***anwendbar, und darin liegt der Grund für die Möglichkeit einer Uebertragung der Resultate von*** A. ***auf ein System.***

Die $\frac{dx_k}{dz}$ werden nunmehr ganz bestimmte Functionen von den x und den Z:

$$(\eta.) \qquad \frac{dx_k}{dz} = \eta_k(x_1, \ldots, x_n;\ Z_1, \ldots, Z_s) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

und diese n Gleichungen sind die Differentialgleichungen $(\eta.)$ des Systemes von Integralgleichungen $(\omega.)$:

$$(\omega.) \qquad \omega_i(x_1, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_r) = c_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

---

*) Vergl. A. S. 225. Definition 5.

**) A. S. 215.

Nehmen wir nun jetzt die Voraussetzung hinzu, dass die Coefficienten Z des Systemes $(\eta.)$ unabhängige, unbestimmte Functionen von z werden sollen, so kommt alles darauf an, zu entscheiden, in welcher Beziehung die Anzahl s der Z zu der Zahl r der u steht. Dabei ist natürlich, wie schon vorher bei $(\omega.)$, so jetzt auch bei $(\eta.)$ die Schreibweise so vorausgesetzt, dass die Z nicht in einer noch geringeren Zahl von Verbindungen auftreten.

Es wäre nun zunächst denkbar, dass $s < r$ ist. Dann wird die Transformation $(\mathfrak{f}.)$ die Unbestimmte u in $s < r$ neue Unbestimmte Z überführen. Es ist aber vorauszusetzen gewesen, dass die u in $(\omega.)$, also auch in $(\eta.)$ nicht in einer geringeren Anzahl von Verbindungen auftreten. Mithin gehört die Transformation $(\mathfrak{f}.)$ dem allgemeinen Falle der Definition 4. von A. (S. 222) an, es können also $r-s$ der u zu festen Functionen specialisirt werden und die Z bleiben immer noch unabhängige Unbestimmte*) und die Gleichungen $(\omega.)$ die allgemeinen Integralgleichungen des Systemes $(\eta.)$. Das heisst aber das System $(\omega.)$ enthält die u nur in s verschiedenen Verbindungen. Dies widerspricht der Voraussetzung, dass r diese Minimalzahl ist. Es ist also die Annahme $s < r$ unmöglich.

Ist zweitens $s = r$, so ist die Anzahl der Unbestimmten der Integralgleichungen gleich der der Unbestimmten der Differentialgleichungen und die Z sind wie die u unabhängig. Ist endlich $s > r$, so folgen zwischen den Z Differentialgleichungen höherer als nullter Ordnung. Wir sehen also entsprechend dem Satz 10 in A. (S. 241):

Satz 1. „Lässt sich das System von Differentialgleichungen, $(\eta.)$ für unabhängige, unbestimmte Coefficienten Z durch Integralgleichungen der speciellen Form:

$$\omega_i(x_1, \ldots, x_n;\ u_1(z), \ldots, u_r(z)) = c_i$$

integriren, in welchen z nicht explicite vorkommt und die u unabhängige Unbestimmte sind, so ist immer $s = r$.“

2. ***Zurückführung der allgemeinen Systeme, in deren Integralgleichungen z explicite auftritt und die u durch Differentialgleichungen an einander gebunden sind auf die vorigen speciellen, in welchen z nicht explicite auftritt und die u nicht durch Differentialgleichungen verbunden sind.*** Nun lässt aber die Problemstellung als Integralgleichungen auch solche von allgemeinerer als der eben betrachteten Gestalt zu, insofern in ihnen *einmal* die unab-

*) A. S. 223 Satz 3. b).

hängige Veränderliche z noch explicite auftreten und *zweitens* ein System ($\Sigma.$) von Differentialgleichungen zwischen den u bestehen darf.

a. Das explicite z lässt sich aber herausbringen, wenn an Stelle von z eine unbestimmte Function von z_1 eingeführt wird. Es ist unmittelbar evident, dass das Integralgleichungssystem dann die unabhängige Verderliche z_1 nicht mehr enthalten und die Coefficienten des Differentialgleichungssystems wieder in unabhängige, unbestimmte Functionen von z_1 übergehen werden*).

b. Wenn aber *zweitens* die Integralgleichungen:

$$\omega_i(x_1, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_r) = c_i \qquad (i=1, \ldots, n)$$

erst vermöge gewisser zwischen den u bestehenden Differentialgleichungen ($\Sigma.$) die Integralgleichungen des Systemes ($\eta.$) werden für unabhängige, unbestimmte Coefficienten Z, so behaupten wir wie in A., dass durch Fortlassen des Systemes ($\Sigma.$), wenn also die u als *unabhängige* Unbestimmte betrachtet werden, das System ($\omega.$) zu Differentialgleichungen ein System ($\eta.$) besitzt, welches wieder lauter unabhängige, unbestimmte Coefficienten Z enthält.

Für den Augenblick möge das alte System ($\omega.$), welches erst durch Hinzunahme von ($\Sigma.$) Integralgleichungssystem eines Systemes ($\eta.$) mit unabhängigen Z wird, durch ($\bar{\omega}.$), das zugehörige Differentialgleichungssystem durch ($\tilde{\eta}.$) bezeichnet werden, dagegen das System ($\omega.$) bei unabhängigen u durch ($\omega.$) und sein zugehöriges Differentialgleichungssystem durch ($\eta.$) benannt werden. Alsdann ist zu zeigen, dass ($\eta.$) gleichzeitig mit ($\tilde{\eta}.$) lauter unabhängige Coefficienten enthält. In dem Systeme ($\eta.$) werden ja jedenfalls die Coefficienten Z Differentialfunctionen von r unabhängigen Unbestimmten u:

$$(\mathfrak{f}.) \qquad Z_j = \mathfrak{f}_j(u_1, \ldots, u_r)_1. \qquad (j=1, \ldots, s)$$

Die Anzahl s ist nun entweder $\leqq r$ oder $> r$. Im ersten Falle haben wir soeben gesehen (Satz 1.), dass die Z von selbst unabhängig bleiben, indem $s < r$ gar nicht vorkommen, sondern nur $s = r$ sein kann. Im zweiten Falle dagegen bestehen $s-r$ Differentialgleichungen höherer Ordnung zwischen den Z. Es ist also zu zeigen, dass diese Möglichkeit nicht eintreten kann.

Es gehen ja die Coefficienten Z des Differentialgleichungssystemes ($\eta.$) über in die Coefficienten $\tilde{Z}$ des Differentialgleichungssystemes ($\tilde{\eta}.$), wenn

*) Vgl. A. S. 246 f.

die zwischen den u bestehenden Differentialgleichungen $(\Sigma.)$ hinzugenommen werden. Vermöge $(\Sigma.)$ kommen aber zu den $s-r$ im Falle $s > r$ bestehenden Differentialgleichungen noch neue hinzu und, da das System $(\tilde{\eta}.)$ jedenfalls unabhängige Coefficienten besitzen soll, so ist der einzige Ausweg der, dass alle Gleichungen zwischen den Z, die vermöge $(\mathfrak{f}.)$ und $(\Sigma.)$ bestehen, von der nullten Ordnung werden. Das führt aber ebenfalls zu einem Widerspruche, wie A. S. 242—245 gezeigt wurde*). Mithin ist die Annahme falsch, dass $s > r$ sein kann. Die Behauptung ist also erwiesen, und es gilt wie in A. so auch hier:

„Sind die Gleichungen $(\omega.)$:

$$\omega_i(x_1, \ldots, x_n;\; u_1, \ldots, u_r) = c_i$$

Integralgleichungen des Systemes $(\tilde{\eta}.)$ mit unabhängigen, unbestimmten Coefficienten $\tilde{Z}$ vermöge gewisser zwischen den u bestehenden Differentialgleichungen $(\Sigma.)$, so sind sie auch ohne jenes System $(\Sigma.)$, also für ***unabhängige,*** unbestimmte Functionen u Integralgleichungen eines Differentialgleichungssystemes $(\eta.)$ mit unabhängigen, unbestimmten Coefficienten Z."

Demnach werden alle Differentialgleichungssysteme, welche unserem Problem Genüge leisten, in solchen enthalten sein, deren Integralgleichungen ***unabhängige,*** unbestimmte Coefficienten besitzen.

3. ***Es kann immer die Zahl r der u gleich der Anzahl s der Z angenommen werden.*** Es lehrten nun die Ueberlegungen in No. 1 dieses Abschnittes, für Integralgleichungen $(\omega.)$ mit unabhängigen u und ohne explicites z, dass, wenn sie unserem Problem Genüge leisten, die Zahl der u und die der Z die gleiche ist, nämlich r. Da nun in No. 2 gezeigt wurde, dass überhaupt alle Systeme, welche die Anforderungen des Problems erfüllen, in jenen speciellen der No. 1 enthalten sind, so ergiebt sich folgender die Sätze a., b., c. in A. vereinigende Satz:

Satz abc. „Alle Differentialgleichungssysteme:

$$\frac{dx_k}{dz} = \eta_k(x_1, \ldots, x_n;\; Z_1(z), \ldots, Z_s(z)), \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

welche für unabhängige, unbestimmte Coefficienten Z ein System von n Integralgleichungen besitzen, sind in denjenigen enthalten, deren Integralgleichungen nur ***unabhängige,*** unbestimmte Functionen u, und z nur als Argument dieser u enthalten; deren Integralgleichungen also die Gestalt haben:

$$(\omega.) \qquad \omega_i(x_1, \ldots, x_n;\; u_1(z), \ldots, u_r(z)) = c_i. \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

*) Man hat nur dort an Stelle der η unsere Z, an Stelle der f unsere $\mathfrak{f}$ zu setzen.

Die Anzahl der Z und der u ist dabei immer die gleiche, es sind also:

$$(\eta.) \qquad \frac{dx_k}{dz} = \eta_k(x_1, \ldots, x_n;\; Z_1(z), \ldots, Z_r(z)) \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,n)}$$

die zu $(\omega.)$ gehörigen Differentialgleichungen."

Anmerkung. Bei dieser Gelegenheit mag gleich eine kurze Bemerkung eingefügt werden, welche die Fassung der Sätze a. und b. in A. betrifft. Dieselben sind dem dortigen Zusammenhange entsprechend für diejenigen Typen aufgestellt, auf welche die Betrachtung bereits reducirt war und welche in der Integralgleichung lauter unabhängige u besitzen. Dies ist bei der Aufstellung der beiden Sätze nicht noch besonders wiederholt, da es als aus dem Zusammenhange hervorgehend erachtet wurde. Will man aber jedes Missverständniss vermeiden, so beginne man die Behauptung statt mit „so ist" oder „so hat" mit: „so kann man immer annehmen, dass". Jedenfalls liefert unser eben hier aufgestellter Satz abc. für $n = 1$ eine einwurfsfreie Zusammenziehung der Sätze a.—c. in A.

4. *Der Begriff des Enthaltenseins.* Man kann nun noch weiter ins Einzelne gehen als es in A. geschehen ist und, indem man die soeben (bei Satz abc.) verwandte Ausdrucksweise des „Enthaltenseins" urgirt, darnach fragen:

„*In welcher Weise* sind alle Differentialgleichungssysteme in denjenigen enthalten, deren Integralgleichungen nur unabhängige u, und z nur als Argument der u enthalten?"

Die Antwort darauf liefern sofort die in No. 2 angestellten Betrachtungen.

„Haben nicht schon von selbst die Integralgleichungen die Eigenschaft, dass sie nur unabhängige u und z nur als Argument der u enthalten, so erlangen sie doch die erste dadurch, dass alle zwischen den u bestehenden Differentialgleichungen fortgelassen werden und die zweite dadurch, dass eine willkürliche Function von z als neue Veränderliche statt z eingeführt wird. In beiden Fällen erhält man wieder ein Differentialgleichungssystem, welches sich für unabhängige, unbestimmte Coefficienten integriren lässt."

Sucht man daher umgekehrt aus einem Differentialgleichungssysteme $(\eta.)$, welches sich für unabhängige, unbestimmte Coefffcienten integriren lässt und dessen Integralgleichungen $(\omega.)$ nur unabhängige u, und z nur als Argument der u enthalten, ein neues Differentialgleichungssystem $(\bar{\eta}.)$ zu bekommen, welches sich ebenfalls für unabhängige, unbestimmte Coeffi-

cienten integriren lässt, aber in der Form, dass die Integralgleichungen ($\varpi.$) das z auch explicite enthalten und zwischen deren Unbestimmten u Differentialgleichungen bestehen, so erreicht man dies in allgemeinster Weise durch folgende zwei Schritte:

1. Man stellt zwischen den u des Integralgleichungssystemes ($\omega.$) solche Differentialgleichungen höherer als nullter Ordnung auf, welche nur Gleichungen nullter Ordnung zwischen den Z zur Folge haben. Hierdurch bleiben nur eine geringere Zahl der Z *unabhängige* Unbestimmte. Diese seien typisch durch $\tilde{Z}$ bezeichnet. Die übrigen Z werden Functionen der $\tilde{Z}$. Werden diese wirklich durch die $\tilde{Z}$ ausgedrückt und die Werthe in ($\eta.$) eingesetzt, so erhält man das gesuchte System ($\tilde{\eta}.$).

2. Man setzt eines der u gleich einer neuen unabhängigen Variablen, etwa:

$$u_1(z) = z_1,$$

und führt überall z_1 statt z ein. Ist dann das neue Differentialgleichungssystem mit der willkürlichen Veränderlichen z_1 so beschaffen, dass es wie ($\eta.$) z_1 nicht explicite und nur unabhängige Coefficienten Z enthält, so hat man wieder eines der verlangten Systeme ($\tilde{\eta}.$).

Was die *erste* der beiden Anweisungen anlangt, so ist dieselbe sehr einfach auszuführen. Es geschieht dies offenbar auf die allgemeinste Art, indem irgend welche sich nicht widersprechende Gleichungen nullter Ordnung zwischen den Z aufgestellt und in ihnen mit Hülfe der Gleichungen:

$$(\mathfrak{f}.) \qquad Z_j = \mathfrak{f}_j(u_1, \ldots, u_r)_1 \qquad (j=1, \ldots, r)$$

die Z durch die u ersetzt. So wird ein System ($\Sigma.$) von Differentialgleichungen einer gewissen Ordnung zwischen den u erhalten, welches wirklich nur Gleichungen nullter Ordnung zwischen den Z zur Folge hat. Wie jetzt weiter zu verfahren ist, wurde bereits angegeben.

Der *zweite* der beiden Schritte dagegen ist etwas Unmögliches. Setzt man nämlich statt $u_1(z) = z_1$ lieber gleich — was offenbar auf dasselbe hinauskommt —:

$$u_1(z) = c.z_1,$$

wo c eine willkürliche Constante bedeutet, so gehen die Gleichungen ($\mathfrak{f}.$) über in diese:

$$Z_j = \mathfrak{f}_j(cz_1, u_2, \ldots, u_r; c, u_2', \ldots, u_r'), \qquad (j=1, \ldots, r)$$

wo nunmehr die u unbestimmte Functionen von z_1 und die Accente Ab-

leitungen nach z_1 bedeuten. Die eben aufgeschriebenen Gleichungen stellen aber die Z als Differentialfunctionen von nur $r-1$ Unbestimmten dar. Es besteht mithin nach A. Satz 3. (S. 223) eine Differentialgleichung zwischen ihnen. Das neue Coefficientensystem soll aber wieder nur *unabhängige* Functionen enthalten. Die Gleichung zwischen den Z muss sich also auf eine solche nullter Ordnung reduciren und dies muss gelten für unabhängige *Variable*

$$cz_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_r; \quad c, \quad u_2', \quad \ldots, \quad u_r'.$$

Dann würde aber auch für unbhängige, *unbestimmte Functionen*

$$u_1, \quad \ldots, \quad u_r$$

aus

$$Z_j = \bar{\mathfrak{f}}_j(u_1, \ldots, u_r; \; u_1', \ldots, u_r')$$

eine Gleichung nullter Ordnung folgen, was ausgeschlossen ist. Hieraus geht hervor:

„Es ist unmöglich, das eine der u gleich z zu setzen und es gleichzeitig so einzurichten, dass das System (η.) wieder in ein solches mit *unabhängigen* Coefficienten übergeht.“

Der erste der beiden oben angegebenen Schritte bleibt also allein übrig um die sämmtlichen Systeme zu erhalten, welche dem Problem Genüge leisten. Es ergiebt sich also als Antwort auf die Frage dieser No.:

Zusatz zu abc. „Aus denjenigen *speciellen* Systemen, welche die Anforderungen des Problems erfüllen und deren Integralgleichungen (ω.) nur unabhängige u und z nur als Argument der u enthalten, ergeben sich die allgemeinsten Systeme, welche sich im Sinne der Definition 1. für unabhängige, unbestimmte Coefficienten integriren lassen, auf folgende Weise:

Man stelle irgend welche widerspruchsfreien Gleichungen nullter Ordnung (G.) zwischen den Coefficienten Z eines Systemes (η.) auf. Hierdurch bleiben eine gewisse Zahl der Z *unabhängige* Unbestimmte. Diese seien typisch durch $\check{Z}$ bezeichnet. Die übrigen Z werden Functionen dieser $\check{Z}$. Werden diese wirklich durch die $\tilde{Z}$ ausgedrückt und die so erhaltenen Werthe statt ihrer in (η.) eingeführt, so erhält man ein neues System ($\tilde{\eta}$.). Dasselbe lässt sich wieder für unabhängige, unbestimmte Coefficienten $\tilde{Z}$ integriren und zwar werden die Integralgleichungen ($\bar{\omega}$.) derselben aus denen (ω.) des Systemes (η.) erhalten, wenn für die u diejenigen Differentialgleichungen (Σ.) aufgestellt werden, welche aus (G.) hervorgehen, wenn

in sie mit Hülfe von

$$Z_j = \mathfrak{f}_j(u_1, \ldots, u_r)_1$$

die u an Stelle der Z eingeführt werden."

5. *Die Sätze d. und e. der Arbeit* A. *werden auf den Fall eines Systemes übertragen.* Dem Gange der Entwickelungen des dritten Abschnittes von A. entsprechend wäre nun folgender Satz zu beweisen:

Satz d. „Werden die Gleichungen:

$$\omega_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n; \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r) = \omega_i(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r)$$

zwischen den $2(n+r)$ Variablen $\bar{x}, \bar{u}, x, u$ aufgelöst nach den $\bar{x}$:

$$\bar{x}_k = f_k(x_1, \ldots, x_n; \bar{u}, u), \qquad (k=1, \ldots, n)$$

so enthalten die rechten Seiten die $2r$ Grössen $\bar{u}$ und u nur in r und nicht weniger verschiedenen, von den x freien Verbindungen:

$$(\bar{\psi}.) \qquad \bar{v}_j = \psi_j(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r; u_1, \ldots, u_r) \qquad (j=1, \ldots, r)$$

so dass man hat:

$$(f.) \qquad \bar{x}_k = f_k(x_1, \ldots, x_n; \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_r).$$

Die Gleichungen $(\bar{\psi}.)$, lassen sich sowohl nach den $\bar{u}$ als den u auflösen."

Der Beweis für die Behauptung bleibt der Sache nach genau derselbe wie in A. S. 247—249. Es treten nur eben immer an Stelle von einer Gleichung deren n. Wir sparen uns deshalb eine Wiederholung und bemerken nur, dass der Beweis auch wörtlich aus A. übernommen werden kann, wenn geschrieben wird statt:

$$x, \quad y, \quad \eta, \quad H, \quad \Omega, \quad g, \quad f$$

jetzt dem allgemeinen Falle entsprechend

$$z, \quad x_k, \quad Z, \quad \eta_k, \quad \omega_i, \quad f_k, \quad \mathfrak{f}$$

und noch „Gleichungssystem" statt „Gleichung" gesetzt wird.

Ganz dasselbe gilt für den Satz *e.* (A. S. 251.) Er lautet jetzt:

Satz e. „Betrachtet man das durch Satz *d.* definirte Gleichungssystem:

$$(\bar{f}.) \qquad \bar{x}_k = f_k(x_1, \ldots, x_n; \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_r) \qquad (k=1, \ldots, n)$$

als eine Transformation der n Veränderlichen x in die neuen $\bar{x}$ mit den r wesentlichen Parametern $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_r$, so bildet die Schaar aller dieser ∞^r Transformationen eine r-gliedrige continuirliche Gruppe, und

$$(f.) \qquad f_i(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r) = c_i \qquad (i=1, \ldots, n)$$

oder, nach den x aufgelöst:

$$(f^{-1}.) \qquad x_i = f_i(c_1, \ldots, c_n;\ v_1, \ldots, v_r)$$

sind n allgemeine Integralgleichungen des Systemes von n Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_k}{dz} = \eta_k(x_1, \ldots, x_n;\ Z_1, \ldots, Z_r) \qquad (k=1, \ldots, n)$$

für Coefficienten Z, welche unabhängige, unbestimmte Functionen von z sind."

6. *Schluss des Beweises.* Es erübrigt jetzt nur noch, die im Theoreme angekündigte Form des Systemes $(\eta.)$ aus der Thatsache abzuleiten, dass die Transformationen $(\bar{f}.)$ eine r-gliedrige Gruppe bilden. Sind nämlich:

$$\bar{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r) \qquad (i=1, \ldots, n)$$

die Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe, welche — wie die unserige — die inverse Transformation enthält, so wird die Gruppe erzeugt von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$X_j(f) \equiv \sum_1^n {}_k\, \xi_{jk}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (j=1, \ldots, r)$$

und die $\bar{x}$ als Functionen der a genügen $n.r$ Gleichungen der Form:

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial a_k} = \sum_1^r {}_j\, \xi_{ji}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)\psi_{jk}(a_1, \ldots, a_r). \qquad \binom{i=1, \ldots, n}{k=1, \ldots, r}$$

Ersetzt man nun $\bar{x}$ durch x, x durch c und a durch v, so gehen die Transformationen der Gruppe über in die Integralgleichungen $(f^{-1}.)$ von (η):

$$x_i = f_i(c_1, \ldots, c_n;\ v_1, \ldots, v_r).$$

Es bestehen also für die Integrale x die $n.r$ Gleichungen:

$$\frac{\partial x_i}{\partial v_k} = \sum_1^r {}_j\, \xi_{ji}(x_1, \ldots, x_n).\psi_{jk}(v_1, \ldots, v_r). \qquad \binom{i=1, \ldots, n}{k=1, \ldots, r}$$

Multiplicirt man diese mit $\frac{dv_k}{dz}$ und summirt über k, so erhält man die Gestalt der Differentialgleichungen $(\eta.)$, nämlich:

$$(\eta.) \qquad \frac{dx_i}{dz} = \sum_1^r {}_j\, Z_j(z).\xi_{ji}(x_1, \ldots, x_n),$$

wobei die Z an die v gebunden sind durch die Gleichungen:

$$(\mathfrak{f}.) \qquad Z_j(z) = \sum_1^r {}_k\, \psi_{jk}(v_1, \ldots, v_r)\cdot\frac{dv_k}{dz}$$

Die r Grössen Z sind also Differentialfunctionen erster Ordnung von r unabhängigen Unbestimmten v dieser speciellen Form; die v sind selbst

Functionen der u. Die letzten Gleichungen sind also nichts weiter als die besondere Form, welche die Gleichungen (f.) annehmen, nachdem einmal die Gruppeneigenschaft erkannt ist.

Hiermit ist nun alles in dem Theorem Behauptete erwiesen.

3.

Anwendung der vorigen Entwickelungen auf den Fall $n = 2$.

Die Lösung, welche im Vorstehenden von unserem Probleme gegeben worden ist, erlaubt die wirkliche Aufzählung aller Systeme, welche sich für unbestimmte, unabhängige Coefficienten integriren lassen, sobald alle Gruppen bekannt sind. Wie schon erwähnt tritt dies für die Fälle $n = 1$ bis $n = 3$ ein. Es soll daher hier noch als Beispiel die Anwendung des Vorhergehenden auf den Fall $n = 2$ gemacht werden. Der Zweck des Folgenden ist hauptsächlich eben der, zur Illustration des Vorhergehenden an einem concreten Beispiel zu dienen und nicht etwa besondere Vollständigkeit zu erstreben. Es soll jedoch hervorgehoben werden, dass man ähnlich auch für die Fälle $n > 2$ zur Aufstellung aller fraglichen Systeme verfahren kann.

1. *Die linearen Systeme.* Zunächst findet man unter den Differentialgleichungssystemen, welche unserem Probleme Genüge leisten, die linearen Differentialgleichungen wieder. Also für den Fall $n = 2$ das System:

$$(\eta.) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dz} = Z_{10}+Z_{11}x_1+Z_{12}x_2, \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dz} = Z_{20}+Z_{21}x_1+Z_{22}x_2, \end{cases}$$

dessen Integralgleichungen für unbestimmte, unabhängige Z die Form haben

$$(\omega.) \qquad \begin{cases} u_{10}+u_{11}x_1+u_{12}x_2 = c_1, \\ u_{20}+u_{21}x_1+u_{22}x_2 = c_2, \end{cases} \quad \text{bezw.} \quad \begin{aligned} x_1 &= v_{10}+v_{11}c_1+v_{12}c_2, \\ x_2 &= v_{20}+v_{21}c_1+v_{22}c_2. \end{aligned}$$

2. *Die lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung.* Die Gleichungen (η.), (ω.) stimmen offenbar ganz mit den Angaben des Theorems. Sie enthalten wieder unter sich die linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche ja als System aufgefasst, sich so schreiben lassen:

$$\frac{dx_1}{dz} = x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dz} = Z_1x_1+Z_2x_2.$$

Die Integralgleichungen dieses Systems sind für unabhängige Unbestimmte Z

$$x_1 = v_1.c_1 + v_2.c_2,$$
$$x_2 = v_1'.c_1 + v_2'.c_2.$$

Diese besitzen also nicht *unabhängige* Coefficienten v, vielmehr sind die Coefficienten der zweiten Gleichung die Ableitungen derer der ersten. Lässt man aber alle Differentialgleichungen fort und setzt als Integralgleichungen an:

$$x_1 = v_{11}.c_1 + v_{12}.c_2,$$
$$x_2 = v_{21}.c_1 + v_{22}.c_2$$

so besitzt das zugehörige Differentialgleichungssystem:

$$\frac{dx_1}{dz} = Z_{11}.x_1 + Z_{12}.x_2,$$
$$\frac{dx_2}{dz} = Z_{21}.x_1 + Z_{22}.x_2$$

lauter unabhängige Coefficienten Z. In diesem Systeme ist also das vorige „enthalten", ganz wie es unser Theorem verlangt.

4. *Aufzählung der übrigen Systeme.* Was nun die Aufzählung aller übrigen Systeme für $n = 2$ anlangt, so kann man sich — wie für jedes n — auf *primitive* Gruppen beschränken. Denn die durch *imprimitive* Gruppen gelieferten Systeme geben vom functionentheoretischen Standpunkt nur triviale Fälle, sobald die ersteren bekannt sind.

Die Untersuchungen von *Lie**) lehren nun aber, dass die *allgemeine projective* Gruppe:

$$x_1 = \frac{a_{10} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{00} + a_{01}x_1 + a_{02}x_2},$$
$$x_2 = \frac{a_{20} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{00} + a_{01}x_1 + a_{02}x_2}$$

alle für $n = 2$ überhaupt auftretenden Typen von primitiven Gruppen umfasst. In der That sind die vorher aufgeführten linearen Gruppen ja in ihr mit einbegriffen.

Wie also für $n = 1$ die Entwickelungen von A. die projective Gruppe der Geraden und mit ihr die *Riccati*sche Gleichung zum Repräsentanten aller möglichen Fälle machte, so wird für $n = 2$ die projective Gruppe der Ebene und eine Verallgemeinerung der *Riccati*schen Gleichung zu

*) *Lie-Engel*, Transformationsgruppen III.

einem System zum Repräsentanten der hier auftretenden Fälle. Diese Analogie hört übrigens für $n = 3$ schon auf.

5. *Das der Riccatischen Gleichung im Falle $n = 2$ entsprechende System.* Es möge nun zum Schluss eine schematische Aufstellung des fraglichen Systemes folgen.

Die infinitesimalen Transformationen der projectiven Gruppe sind:

$$\left| p_1, \quad p_2, \quad x_1 p_1, \quad x_1 p_2, \quad x_2 p_1, \quad x_2 p_2, \quad x_1^2 p_1 + x_1 x_2 p_2, \quad x_1 x_2 p_1 + x_2^2 p_2. \right|$$

Das zugehörige System $(\eta.)$ ist daher:

$$(\eta.) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dz} = Z_{10} + Z_{11} x_1 + Z_{12} x_2 + Z_{01} x_1^2 + Z_{02} x_1 x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dz} = Z_{20} + Z_{21} x_1 + Z_{22} x_2 + Z_{01} x_1 x_2 + Z_{02} x_2^2. \text{*)} \end{cases}$$

Das zugehörige System der Integralgleichungen $(\omega.)$ lautet:

$$(\omega.) \qquad \begin{cases} \dfrac{u_{10} + u_{11} x_1 + u_{12} x_2}{u_{00} + u_{01} x_1 + u_{02} x_2} = c_1, \quad x_1 = \dfrac{v_{10} + v_{11} c_1 + v_{12} c_2}{v_{00} + v_{01} c_1 + v_{02} c_2} \\ \qquad\qquad \text{oder:} \\ \dfrac{u_{20} + u_{21} x_1 + u_{22} x_2}{u_{00} + u_{01} x_1 + u_{02} x_2} = c_2, \quad x_2 = \dfrac{v_{20} + v_{21} c_1 + v_{22} c_2}{v_{00} + v_{01} c_1 + v_{02} c_2}. \end{cases}$$

Die v sind zu den u „reciprok" und genügen daher den Gleichungen

$$\sum_0^2{}_\beta\, u_{\alpha\beta} v_{\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\gamma}, \qquad \sum_0^2{}_\beta\, v_{\alpha\beta} u_{\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\gamma}, \qquad (\alpha, \gamma = 0, 1, 2)$$

wo $\varepsilon_{\alpha\gamma} = 0$ für $\alpha \neq \gamma$ und $\varepsilon_{\alpha\gamma} = 1$ für $\alpha = \gamma$.

Die Determinanten

$$U = |u_{\alpha\beta}|, \quad V = |v_{\alpha\beta}| \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2)$$

verschwinden nicht identisch und es ist:

$$UV = 1.$$

Die Z werden natürlich wieder Differentialfunctionen der u (bezw. v), nämlich es wird:

$$(\text{f.}) \qquad Z_{\alpha\beta} = \sum_0^2{}_\gamma\, v_{0\gamma} u'_{\gamma 0} . \varepsilon_{\alpha\beta} - \sum_0^2{}_\gamma\, v_{\alpha\gamma} u'_{\gamma\beta} \quad \text{oder:} \quad Z_{\alpha\beta} = \sum_0^2{}_\gamma\, v'_{0\gamma} u_{\gamma 0} . \varepsilon_{\alpha\beta} - \sum_0^2{}_\gamma\, v'_{\alpha\gamma} . u_{\gamma\beta};$$

$$(\alpha, \beta = 0, 1, 2)$$

dabei ist zu setzen

$$Z_{00} = 0.$$

Da nun die u (bezw. v) nur ihren Verhältnissen nach bestimmt sind, kann man über sie so verfügen, dass die erste Summe in den $Z_{\alpha\beta}$ verschwindet.

*) Systeme dieser Form sind bereits von *Jacobi* betrachtet worden.

Alsdann ergeben die Gleichungen (f.) nach den u', bezw. v' aufgelöst ein ***lineares homogenes System*** für die u, bezw. v:

$$(v.)\qquad \frac{du_{\alpha\beta}}{dz} = -\sum_0^2{}_\gamma\, u_{\alpha\gamma} Z_{\gamma\beta} \qquad \text{oder:} \qquad \frac{dv_{\alpha\beta}}{dz} = \sum_0^2{}_\gamma\, Z_{\alpha\gamma} v_{\gamma\beta}. \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2)$$

Es geht eigentlich hieraus schon hervor, dass analog der *Riccati*schen Gleichung auch unser System ein *System Vessiotscher Transformirten* ist. Genauer zeigt dies folgende Ueberlegung.

Es genügen nach (v.)

$$u_0 = u_{00},\quad u_0 = u_{10},\quad u_0 = u_{20},\quad \text{bezw.}\quad v_0 = v_{00},\quad v_0 = v_{01},\quad v_0 = v_{02}$$

als Fundamentalsystem *einer* linearen homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$(0.)\quad u_0^{(3)} + \lambda_{01} u_0^{(2)} + \lambda_{02} u_0' + \lambda_{03} u_0 = 0, \quad \text{bezw.}\quad v_0^{(3)} + \mu_{01} v_0^{(2)} + \mu_{02} v_0' + \mu_{03} v_0 = 0,$$

deren Coefficienten rationale Differentialfunctionen der Z sind, während

$$u_1 = u_{01},\quad u_{11},\quad u_{21},\quad \text{bezw.}\quad v_1 = v_{10},\quad v_{11},\quad v_{12}$$

einerseits und

$$u_2 = u_{02},\quad u_{12},\quad u_{22},\quad \text{bezw.}\quad v_2 = v_{20},\quad v_{21},\quad v_{22}$$

andererseits als Fundamentalsystem je einer linearen homogenen Gleichung dritter Ordnung genügen, die zur selben „Klasse" (nach *Riemann*) wie (0.) gehört:

$$(1.)\quad u_1^{(3)} + \lambda_{11} u_1^{(2)} + \lambda_{12} u_1' + \lambda_{13} u_1 = 0, \quad \text{bezw.}\quad v_1^{(3)} + \mu_{11} v_1^{(2)} + \mu_{12} v_1' + \mu_{13} v_1 = 0,$$

$$(2.)\quad u_2^{(3)} + \lambda_{21} u_2^{(2)} + \lambda_{22} u_2' + \lambda_{23} u_2 = 0, \quad \text{bezw.}\quad v_2^{(3)} + \mu_{21} v_2^{(2)} + \mu_{22} v_2' + \mu_{23} v_2 = 0.$$

Diese gehen durch eine lineare homogene Differentialtransformation zweiter Ordnung:

$$(L.)\quad \begin{cases} u_1 = L_{10} u_0 + L_{11} u_0' + L_{12} u_0^{(2)} \equiv L_1(u_0)_2, & \text{bezw.}\quad v_1 = M_{10} v_0 + M_{11} v_0' + M_{12} v_0^{(2)} \equiv M_1(v_0)_2, \\ u_2 = L_{20} u_0 + L_{21} u_0' + L_{22} u_0^{(2)} \equiv L_2(u_0)_2, & \text{bezw.}\quad v_2 = M_{20} v_0 + M_{21} v_0' + M_{22} v_0^{(2)} \equiv M_2(v_0)_2, \end{cases}$$

aus (0.) hervor und gehören daher in *Riemanns* Bezeichnungsweise wirklich zu derselben Klasse wie (0.). Die λ, μ, L, M sind ihrerseits rationale Differentialfunctionen der Z.

Berücksichtigt man diesen Zusammenhang der u (bezw. v) unter einander, so werden die Integralgleichungen des Systemes (η.):

$$\frac{\overset{1}{\breve{u}} + L_1(\overset{1}{\breve{u}})_2 . x_1 + L_2(\overset{1}{\breve{u}})_2 . x_2}{\overset{0}{\breve{u}} + L_1(\overset{0}{\breve{u}})_2 . x_1 + L_2(\overset{0}{\breve{u}})_2 . x_2} = c_1, \quad \text{bezw.}\quad x_1 = \frac{M_1(\overset{0}{\breve{v}})_2 + M_1(\overset{1}{\breve{v}})_2 . c_1 + M_1(\overset{2}{\breve{v}})_2 . c_2}{\overset{0}{\breve{v}} + \overset{1}{\breve{v}} . c_1 + \overset{2}{\breve{v}} . c_2},$$

$$\frac{\overset{2}{\breve{u}} + L_1(\overset{2}{\breve{u}})_2 . x_1 + L_2(\overset{2}{\breve{u}})_2 . x_2}{\overset{0}{\breve{u}} + L_1(\overset{0}{\breve{u}})_2 . x_1 + L_2(\overset{0}{\breve{u}})_2 . x_2} = c_2, \quad \text{bezw.}\quad x_2 = \frac{M_2(\overset{0}{\breve{v}})_2 + M_2(\overset{1}{\breve{v}})_2 . c_1 + M_2(\overset{2}{\breve{v}})_2 . c_2}{\overset{0}{\breve{v}} + \overset{1}{\breve{v}} . c_1 + \overset{2}{\breve{v}} . c_2}.$$

Dabei bedeuten:

$$\overset{0}{\smile}{u}\quad \overset{1}{\smile}{u}\quad \overset{2}{\smile}{u},\ \text{bezw.}\ \overset{0}{\smile}{v}\quad \overset{1}{\smile}{v}\quad \overset{2}{\smile}{v}$$

ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung:

$$u^{(3)}+\lambda_{01}u^{(2)}+\lambda_{02}u'+\lambda_{03}u=0,\quad \text{bezw.}\quad v^{(3)}+\mu_{01}v^{(2)}+\mu_{02}v'+\mu_{03}v=0.$$

Wir sehen daher aus den Formeln der rechten Spalte, dass x_1 und x_2 rationale Differentialfunctionen der Integrale einer linearen homogenen Gleichung dritter Ordnung sind.

Das allgemeine Integral nämlich von

$$v^{(3)}+\mu_{01}v^{(2)}+\mu_{02}v'+\mu_{03}v = 0$$

hat die Gestalt:

$$v = c_0.[\overset{0}{\smile}{v}+c_1.\overset{1}{\smile}{v}+c_2.\overset{2}{\smile}{v}]$$

und mit Einführung desselben wird:

$$x_1=\frac{M_1(v)_2}{v},\qquad x_2=\frac{M_2(v)_2}{v}.$$

Ein Zurückgehen auf die Definition der M zeigt dabei, dass diese die Form haben:

$$M_1 \equiv m_{10}v+m_{11}v'+m_{12}v'',$$
$$M_2 \equiv m_{20}v+m_{21}v'+m_{22}v'',$$

wobei zwischen den m die Relation besteht:

$$m_{10}m_{22}-m_{12}m_{20} = 0.$$

Ist umgekehrt x_1 gleich irgend einer Differentialfunction der Form M_1 von dem allgemeinen Integral v einer linearen homogenen Gleichung dritter Ordnung dividirt durch v, und x_2 gleich einer Differentialfunction der Form M_2 von v dividirt durch v, wobei

$$m_{10}m_{22}-m_{12}m_{20} = 0$$

ist, so genügen x_1 und x_2 demjenigen Systeme $(\eta.)$, welches zur allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene gehört.

Denn x_1 und x_2 lassen sich alsdann in die Form setzen:

$$x_1 = m_1\cdot\frac{v'}{v}+m_2\cdot\left(\varrho+\frac{v''}{v}\right),$$

$$x_2 = n_1\cdot\frac{v'}{v}+n_2\cdot\left(\varrho+\frac{v''}{v}\right).$$

Mithin wird:

$$\frac{dx_1}{dz} = \cdots-m_1\cdot\left(\frac{v'}{v}\right)^2+m_2\cdot\frac{v'''}{v}-m_2\cdot\frac{v'v''}{v^2},$$

$$\frac{dx_2}{dz} = \cdots-n_1\cdot\left(\frac{v'}{v}\right)^2+n_2\cdot\frac{v'''}{v}-n_2\cdot\frac{v'v''}{v^2}.$$

Dabei bedeuten die Punkte Glieder, die in $\frac{v'}{v}$ und $\frac{v''}{v}$ linear sind. Nun wird aber nach der Differentialgleichung:

$$v'''+\mu_{01}v''+\mu_{02}v'+\mu_{03} = 0$$

$\frac{v'''}{v}$ eine lineare Function von $\frac{v'}{v}$ und $\frac{v''}{v}$. Demnach wird:

$$\frac{dx_1}{dz} = \cdots - m_1\cdot\left(\frac{v'}{v}\right)^2 - m_2\cdot\frac{v'}{v}\left(\frac{v''}{v}+\varrho\right),$$

$$\frac{dx_2}{dz} = \cdots - n_1\cdot\left(\frac{v'}{v}\right)^2 - n_2\cdot\frac{v'}{v}\left(\frac{v''}{v}+\varrho\right)$$

oder auch

$$\frac{dx_1}{dz} = \cdots - \left[m_1\frac{v'}{v}+m_2\left(\frac{v''}{v}+\varrho\right)\right]\cdot\frac{v'}{v},$$

$$\frac{dx_2}{dz} = \cdots - \left[n_1\frac{v'}{v}+n_2\left(\frac{v''}{v}+\varrho\right)\right]\cdot\frac{v'}{v}.$$

Aus:

$$x_1 = m_1\frac{v'}{v}+m_2\left(\frac{v''}{v}+\varrho\right),$$

$$x_2 = n_1\frac{v'}{v}+n_2\left(\frac{v''}{v}+\varrho\right)$$

folgt aber rückwärts:

$$\frac{v'}{v} = M_1x_1+M_2x_2,$$

$$\frac{v''}{v}+\varrho = N_1x_1+N_2x_2.$$

Mithin ergiebt sich:

$$\frac{dx_1}{dz} = \cdots - x_1.(M_1x_1+M_2x_2),$$

$$\frac{dx_2}{dz} = \cdots - x_2.(M_1x_1+M_2x_2)$$

und die Punkte deuten jetzt lineare Functionen von x_1 und x_2 an. Diese haben natürlich die Gestalt:

$$Z_{10}+Z_{11}x_1+Z_{12}x_2,$$

$$Z_{20}+Z_{21}x_1+Z_{22}x_2.$$

Setzt man daher noch:

$$-M_1 = Z_{01}, \quad -M_2 = Z_{02},$$

so wird:

$$\frac{dx_1}{dz} = Z_{10}+Z_{11}x_1+Z_{12}x_2+Z_{01}x_1^2+Z_{02}x_1x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dz} = Z_{20}+Z_{21}x_1+Z_{22}x_2+Z_{01}x_1^2+Z_{02}x_1x_2.$$

Es entsteht also wirklich genau dasjenige System $(\eta.)$, welches zur projectiven Gruppe der Ebene gehört.

Wir fassen das Gewonnene so zusammen:

Satz 2. „Das zur allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene gehörige System:

$$(\eta.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dz} = Z_{10}+Z_{11}x_1+Z_{12}x_2+Z_{01}x_1^2+Z_{02}x_1x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dz} = Z_{20}+Z_{21}x_1+Z_{22}x_2+Z_{01}x_1x_2+Z_{02}x_2^2 \end{cases}$$

ist ein System von „transformirten" Gleichungen einer linearen homogenen Gleichung dritter Ordnung:

$$v^{(3)}+\mu_{01}v^{(2)}+\mu_{02}v'+\mu_{03}v = 0,$$

indem das allgemeine Integralsystem von $(\eta.)$ sich durch das allgemeine Integral v rational ausdrückt in der Form:

$$(\mathrm{T.})\qquad \begin{cases} x_1 = m_1\cdot\dfrac{v'}{v}+m_2\left(\varrho+\dfrac{v''}{v}\right), \\ x_2 = n_1\cdot\dfrac{v'}{v}+n_2\left(\varrho+\dfrac{v''}{v}\right), \end{cases}\qquad m_1n_2-m_2n_1 \neq 0.$$

Umgekehrt bestimmt die Transformation (T.) für jede lineare homogene Gleichung dritter Ordnung ein System $(\eta.)$, welches zur allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene gehört."

Berlin, im August 1894.

Zur Theorie der Differentialgleichungen, die Fundamentallösungen besitzen.

(Von Herrn *Alf Guldberg* in Christiania.)*)

In einer Abhandlung**): „Zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung mit unbestimmten Coefficienten" hat Herr *Bohlmann* sich folgendes Problem gestellt:

„Alle Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$(H.)\qquad \frac{dx}{dt} = H(x;\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_s)$$

anzugeben von folgender Beschaffenheit: Es sei H eine bestimmte Function seiner Argumente, dagegen $\eta_1, \ldots, \eta_s$ unbestimmte, unabhängige Functionen von t, und es soll eine feste Function Ω seiner Argumente existiren, so dass die Gleichung:

$$(\Omega.)\qquad \Omega(t,\ x;\ u_1 u_2,\ \ldots,\ u_r) = \text{Const.},$$

wo die u unbestimmte Functionen von t bedeuten, welche jedoch nicht unabhängig zu sein brauchen, die Integralgleichung der Differentialgleichung $(H.)$ ist. Aendert man die Functionen η der Differentialgleichung, so sollen in der Integralgleichung nur die Functionen u sich ändern, dagegen soll Ω dieselbe Function seiner Argumente bleiben. Die Integralgleichung $(\Omega.)$ soll zur Differentialgleichung jede beliebige der Form $(H.)$, aber nur solche dieser Form besitzen können."

Herr *Bohlmann* zeigt zunächst, dass die u irreductibel, d. h. von einander unabhängig sein müssen, und dass man die Voraussetzung machen kann, dass die unabhängige Veränderliche t in der Integralgleichung $(\Omega.)$

---

*) Diese Arbeit, welche sich mit demselben Probleme beschäftigt, wie die vorhergehende des Herrn *Bohlmann*, ist nur wenige Wochen später als letztere der Redaction zugegangen. *F.*

**) Dieses Journal, Bd. 113.

nicht explicite vorkommt. Unter diesen Beschränkungen ist das Problem, wie man leicht sieht, mit dem folgenden identisch: Sämmtliche Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

anzugeben von solcher Beschaffenheit, dass ihre allgemeine Lösung sich vermittelst einer bestimmten *irreductiblen* Anzahl particulärer Lösungen und einer arbiträren Constanten durch eine bestimmte Formel ausdrücken lässt.

Dieses Problem ist schon früher von Herrn *Vessiot* erledigt. In den folgenden Zeilen erlaube ich mir, das analoge Problem für ein System simultaner Differentialgleichungen erster Ordnung kurz zu besprechen.

Es sei folgendes System simultaner Differentialgleichungen vorgelegt:

$$\text{(I.)} \qquad \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t). \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Eine allgemeine Lösung des simultanen Systems (I.) sei:

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n.$$

Wir verlangen nun, dass diese allgemeine Lösung $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sich vermittelst einer bestimmten irreductiblen Anzahl particulärer Lösungen:

$$(\alpha.) \qquad x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}; \quad x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}, \quad \ldots; \quad x_{1p}, x_{2p}, \ldots, x_{np}$$

und n arbiträrer Constanten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ durch ein bestimmtes Formelsystem:

$$\text{(II.)} \quad x_i = \varphi_i(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}; \ldots; x_{1p}, x_{2p}, \ldots, x_{np}; a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ausdrücken lässt, wo die φ_i unverändert bleiben, wenn wir statt der particulären Lösungen (α.) p willkürliche andere Lösungen substituiren.

Aus den Formeln (II.) für die allgemeine Lösung sieht man zunächst, dass die singulären Punkte der Lösungen unabhängig von den arbiträren Constanten sind, dass also die Differentialgleichungen zu der grossen Klasse von Differentialgleichungen gehören, die feste Verzweigungspunkte besitzen. Bei ihrer Integration darf daher die *Fuchs*sche Theorie der linearen Differentialgleichungen auch auf diese Differentialgleichungen eine Anwendung finden.

Schreiben wir nun die Gleichungen (II.) in p verschiedenen Werthsystemen der arbiträren Constanten a, so erhalten wir folgende Gleichungen:

$$(\beta.)\quad \bar{x}_{ij} = \varphi_i(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}; \ldots; x_{1p}, x_{2p}, \ldots, x_{np}; a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}), \quad (i = 1, 2, \ldots, n,\; j = 1, 2, \ldots, p)$$

welche Gleichungen eine continuirliche einfache transitive Gruppe in den Veränderlichen $\bar{x}_{ij}$ und x_{ij} mit den Parametern $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ bilden.

Nach einem bekannten Theorem von *Lie* kann man aber, wenn eine vorgelegte Gruppe in den Veränderlichen x:

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n;\; a_1, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

einfach transitiv ist, neue Parameter (b) von solcher Beschaffenheit einführen, dass man eine einfach transitive Gruppe in den Veränderlichen x' und b mit den Parametern (x_i) erhält. Dieses vorausgesetzt, denken wir uns die Parameter (a) in den Gleichungen (β.) so gewählt, dass diese Gleichungen eine einfach transitive Gruppe mit den Veränderlichen $\bar{x}$ und a bilden. Definiren aber die Gleichungen:

$$\bar{x}_{ij} = \varphi_i(x_{11}, \ldots, x_{n1}; \ldots, x_{1p}, \ldots, x_{np}; a_{1j}, \ldots, a_{nj}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\; j = 1, 2, \ldots, p)$$

eine einfach transitive Gruppe in den Veränderlichen $\bar{x}$ und a, so definiren die Gleichungen:

$$\bar{x}_i = \varphi_i(x_{11}, \ldots, x_{n1}; \ldots; x_{1p}, \ldots, x_{np}; a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

eine p-fach transitive Gruppe in den Veränderlichen $\bar{x}$ und a mit den Parametern $x_{11}, \ldots, x_{np}$.

Wir haben also folgenden Satz:

Soll das System (I.) irreductible Fundamentallösungen besitzen, d. h. lässt die allgemeine Lösung $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sich durch eine bestimmte irreductible Anzahl particulärer Lösungen:

$$(\gamma.)\qquad x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1};\; \ldots;\; x_{1p}, x_{2p}, \ldots, x_{np}$$

und n willkürliche Constanten $a_1, \ldots, a_n$ immer auf dieselbe Weise

$$(\text{III.})\qquad x_i = \varphi_i(x_{11}, \ldots, x_{n1}; \ldots; x_{1p}, \ldots, x_{np}; a_1, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ausdrücken, wo die φ unabhängig von der Wahl der particulären Lösungen (γ.) sind, so definiren die Gleichungen (III.) eine continuirliche p-fach

transitive Gruppe in den Veränderlichen x und a mit den Parametern $x_{11}, \ldots, x_{np}$ *).

Um über die Anzahl (p) der auftretenden particulären Lösungen klar zu werden, erinnern wir uns zweier wichtigen Theoreme von *Lie*.

Eine endliche continuirliche Gruppe in n Veränderlichen ist höchstens $(n+2)$-fach transitiv.

Ist eine r-gliedrige Gruppe in n Veränderlichen $(n+2)$-fach transitiv so ist sie mit der allgemeinen projectiven Gruppe des n-fach ausgedehnten Raumes ähnlich.

Die Werthe, welche die p annehmen dürfen, sind 1, 2, ..., $(n+2)$; und im Falle $p = n+2$ ist die Gruppe der allgemeinen projectiven ähnlich.

Wir sind durch diese Bemerkungen zu dem folgenden Satze, der für den Fall $n = 1$ schon früher von *Königsberger* bewiesen ist, geführt:

Bei jedem Systeme simultaner Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

bilden die particulären Lösungen unendlich viele selbständige, nicht durch analytische Beziehungen auf einander zurückführbare Functionen. Besitzt dagegen das System irreductible Fundamentallösungen, so definirt es höchstens $(n+2)$ in dem angegebenen Sinne wesentlich verschiedene Lösungen.

Wenden wir zuerst diese Bemerkungen auf den Fall $n = 1$ an, d. h. auf die von Herrn *Bohlmann* untersuchten Differentialgleichungen. Nach den fundamentalen Untersuchungen von *Lie* kann jede continuirliche p-fach transitive Gruppe in einer Veränderlichen auf einen von den drei folgenden Typen von Gruppen durch eine Punkttransformation zurückgeführt werden, nämlich die allgemeine projective, die allgemeine lineare und die lineare homogene Gruppe; Gruppen die respective 3-fach, 2-fach und einfach transitiv sind.

Wir erhalten demnach folgende drei Typen von Differentialgleichungen, die Fundamentallösungen besitzen.

Die Differentialgleichung:

$$(1.) \qquad \frac{dx}{dt} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2,$$

---

*) *Guldberg*: Comptes Rendus 1893 p. 964. Man vergleiche auch die wichtige Abhandlung von *Lie* in den Math. Ann. Bd. 25 S. 128, sowie *Lie*: Leipziger Berichte 1893 S. 341.

deren allgemeine Lösung die Form hat:

$$(\gamma'.)\qquad x = \frac{x_2(x_1-x_3)a+x_1(x_3-x_2)}{(x_1-x_3)a+(x_3-x_2)}.$$

Die Differentialgleichung

$$(2.)\qquad \frac{dx}{dt} = A_0+A_1x,$$

deren allgemeine Lösung:

$$x = x_2a+x_1(a-1)$$

ist.

Die Differentialgleichung

$$(3.)\qquad \frac{dx}{dt} = A_1x,$$

deren allgemeine Lösung:

$$x = x_1a$$

ist. In diesen Gleichungen bezeichnen die A Functionen von t, x_i particuläre Lösungen und a eine willkürliche Constante.

Die Differentialgleichung, welche das Hauptinteresse hat, ist selbstverständlich die erste. Aus der Form der allgemeinen Lösung dieser Gleichung geht hervor, dass die Integration der Differentialgleichung geleistet ist, sobald man ein System von Fundamentallösungen kennt. Es fragt sich dann, wenn drei particuläre Lösungen (x_1, x_2, x_3) gegeben sind, ob diese ein System von Fundamentallösungen bilden. Um diese Frage zu erledigen, schreiben wir die Differentialgleichung (1.) in symmetrischer Form:

$$\begin{vmatrix} x' & x^2 & x & 1 \\ x_1' & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2' & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3' & x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

x_1, x_2, x_3 bilden hier ein System von Fundamentallösungen; die Coefficienten A drücken sich dabei durch die x_1, x_2, x_3 und ihre Derivirten folgendermassen aus:

$$A_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_1' & x_1 & 1 \\ x_2' & x_2 & 1 \\ x_3' & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\varDelta},\quad A_1 = -\frac{\begin{vmatrix} x_1' & x_1^2 & 1 \\ x_2' & x_2^2 & 1 \\ x_3' & x_3^2 & 1 \end{vmatrix}}{\varDelta},\quad A_0 = \frac{\begin{vmatrix} x_1' & x_1^2 & x_1 \\ x_2' & x_2^2 & x_2 \\ x_3' & x_3^2 & x_3 \end{vmatrix}}{\varDelta},$$

wo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}$$

ist.

Hieraus geht hervor, dass wenn die drei particulären Lösungen x_1, x_2, x_3 ein System von Fundamentallösungen bilden sollen, ihre Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}$$

von Null verschieden sein muss. Diese nothwendige Bedingung ist auch hinreichend, denn man kann stets eine Gleichung von der Form (y'.) bilden, welche in die Differentialgleichung (1.) substituirt diese identisch befriedigt, und da sie eine willkürliche Constante enthält, liefert sie die allgemeine Lösung.

Beschränken wir uns für das Folgende auf den Fall, dass die A rationale Functionen von t sind. Zwei Fälle sind nun möglich, entweder hat die vorgelegte Differentialgleichung eine Lösung mit einer Differentialgleichung von derselben Art, die Fundamentallösungen besitzt und die zu dem zweiten oder dritten Typus gehört, gemeinsam oder nicht. Im ersten Falle nennen wir die Differentialgleichung reductibel, im zweiten irreductibel. Man kann dann stets durch eine endliche Anzahl von Operationen entscheiden, in wie weit eine vorgelegte Differentialgleichung von der Form (1.) irreductibel ist oder nicht. Ist die gegebene Differentialgleichung irreductibel, so lässt sie sich bekanntlich im allgemeinen nicht durch Quadraturen lösen; soll sie es sein, so muss eine Relation zwischen den Elementen x_1, x_2, x_3 eines Fundamentalsystems statt haben. Diese Relation in Verbindung mit den drei Ausdrücken für A_0, A_1 und A_2 giebt die Elemente x_1, x_2, x_3, durch welche die allgemeine Lösung x sich in bekannter Weise ausdrücken lässt. Diese nothwendige Bedingung ist im allgemeinen nicht hinreichend; ob es der Fall ist, hängt bekanntlich von der Natur der Relation ab.

Wir werden jetzt den Fall $n = 2$, d. h. ein System von zwei Differentialgleichungen, etwas näher besprechen. Da nach den bekannten Untersuchungen von *Lie* sämmtliche continuirlichen Gruppen in zwei Veränderlichen bestimmt sind, können wir leicht ein vollständiges Schema der

Typen aufstellen, auf die sich sämmtliche Systeme von zwei Differentialgleichungen, die Fundamentallösungen besitzen, durch eine Punkttransformation zurückführen lassen. Unter diesen Systemen von Differentialgleichungen werden aber die, welche einer p-fach transitiven imprimitiven Gruppe entsprechen, eine Differentialgleichung enthalten, die entweder eine *Riccati*sche oder eine lineare Differentialgleichung ist, deren Integration also ganz unabhängig von der anderen Gleichung ausgeführt werden kann. Wir werden deshalb nur die primitiven Gruppen in Betracht ziehen. In zwei Veränderlichen nun giebt es nur zwei primitive Gruppen, die p-fach transitiv sind: die allgemeine projective und die allgemeine lineare Gruppe.

Wir erhalten demnach folgende zwei Systeme von Differentialgleichungen:

I. Das System

$$\frac{dx}{dt} = A_1x^2+A_2xy+B_1x+B_2y+B_3,$$
$$\frac{dy}{dt} = A_2y^2+A_1xy+C_1x+C_2y+C_3,$$

dessen allgemeine Lösung die Form:

$$x=\frac{\sum_1^3 {}_i x_i \varDelta_i a_i}{\sum_1^3 {}_i \varDelta_i a_i}, \quad y=\frac{\sum_1^3 {}_i y_i \varDelta_i a_i}{\sum_1^3 {}_i \varDelta_i a_i}$$

hat, wo:

$$\varDelta_1=\begin{vmatrix} x_4-x_3 & x_4-x_2 \\ y_4-y_3 & y_4-y_2 \end{vmatrix}, \quad \varDelta_2=\begin{vmatrix} x_4-x_3 & x_4-x_1 \\ y_4-y_3 & y_4-y_1 \end{vmatrix}, \quad \varDelta_3=\begin{vmatrix} x_4-x_1 & x_4-x_2 \\ y_4-y_1 & y_4-y_2 \end{vmatrix}$$

ist.

II. Das System:

$$\frac{dx}{dt} = A_0+A_1x+A_2y,$$
$$\frac{dy}{dt} = B_0+B_1x+B_2y,$$

dessen allgemeine Lösung die Form

$$x = (x_3-x_2)a_1+(x_2-x_1)a_2+x_1,$$
$$y = (y_3-y_2)a_1+(y_2-y_1)a_2+y_1$$

hat. In diesen Gleichungen bedeuten A, B, C Functionen von t, die x_i, y_i particuläre Lösungen und die a_i willkürliche Constanten. Ohne näher auf die Integration dieser beiden Systeme eingehen zu wollen, bemerken wir, dass das erste System bekanntlich durch eine einfache Substitution in ein System von drei linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung übergeht. Für $n = 1$, $n = 2$ reduciren sich also unsere Gleichungen auf Systeme von linearen Differentialgleichungen. Ganz analog wird es sein, wenn wir die Differentialgleichungen in den Fällen $n = 3$, 4 aufstellen werden. Es scheint sodann, dass man bei diesen Untersuchungen zu keiner wesentlich neuen Klasse von Differentialgleichungen kommen werde.

Ueber lineare Differentialgleichungen mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten.

(Fortsetzung der Abhandlung S. 33—52 dieses Bandes.)

(Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.)

Zweite Abtheilung.

Reguläre Differentialausdrücke.

5.

Definition der regulären Differentialausdrücke und Aufstellung eines Typus von solchen.

Die Differentialgleichung $F_m(y, u, v, w, x) = 0$ in No. 3 sei so beschaffen, dass bei jedem singulären Punkte im Endlichen und entsprechend bei $x = \infty$ der in No. 3 I. für jeden einzelnen Complex zusammenhängender Combinationen der Zweige von u, v, w aufgestellte Differentialausdruck $G_m(y, u, v, w, \zeta)$ bei $\zeta = 0$ regulär sei, also der Coefficient von $\frac{d^{m-\alpha}y}{d\zeta^{m-\alpha}}$ höchstens in αter Ordnung für $\zeta = 0$ unendlich werde. Ein Differentialausdruck $F_m(y, u, v, w, x)$ von dieser Beschaffenheit, heisse ein ***regulärer Differentialausdruck.***

Ein Typus von regulären Differentialausdrücken ist folgender: Der Coefficient von $\frac{d^{m-\alpha}y}{dx^{m-\alpha}}$ in F_m ist unter Zugrundelegung der in No. 1 gemachten Angaben $\frac{H_\alpha(x, u, v, w)}{K_\alpha(x)}$, H_α und K_α ganze rationale Ausdrücke, die ganzen rationalen Functionen von x in Zähler und Nenner haben keinen gemeinschaftlichen Theiler. Hier soll $K_\alpha(x)$ in einem Punkte, wo $K_\alpha(x) = 0$ ist, ***höchstens in*** α***ter Ordnung verschwinden.*** Der höchste Exponent von x in der Gleichung von u sei h, in der von v sei k, in der von w sei l. Nun sei in $\frac{H_\alpha}{K_\alpha}$ $x = t^{-1}$, $ut^h = u'$, $vt^k = v'$, $wt^l = w'$ gesetzt, wodurch der Ausdruck $t^s \frac{H'_\alpha(t, u', v', w')}{K'_\alpha(t)}$ hervorgehe, H'_α und K'_α ganze rationale Ausdrücke

und K'_α für $t=0$ von Null verschieden. *Der Exponent s soll gleich oder grösser als α sein.* Dieser Differentialausdruck F_m ist ein regulärer.

Nach No. 3 I. erhält man bei einem singulären Punkt $x=a$ bei dem einzelnen Complexe von R zusammenhängenden Combinationen der Zweige von u, v, w durch Substitution von $(x-a)^{\frac{1}{R}}=\zeta$

$$(1.)\qquad F_m(y,\ u,\ v,\ w,\ x) = \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-m} G_m(y,\ u,\ v,\ w,\ \zeta).$$

Der Differentialausdruck F_m sei

$$(2.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y.$$

Wird $x-a=\zeta^R$ gesetzt, so ergiebt sich durch den Schluss von $\lambda-1$ auf λ

$$(3.)\qquad (R\zeta^{R-1})^\lambda\frac{d^\lambda y}{dx^\lambda} = \frac{d^\lambda y}{d\zeta^\lambda}+\frac{c_1^{(\lambda)}}{\zeta}\frac{d^{\lambda-1}y}{d\zeta^{\lambda-1}}+\frac{c_2^{(\lambda)}}{\zeta^2}\frac{d^{\lambda-2}y}{d\zeta^{\lambda-2}}+\cdots+\frac{c_{\lambda-1}^{(\lambda)}}{\zeta^{\lambda-1}}\frac{dy}{d\zeta},$$

wo die $c^{(\lambda)}$ Constanten, welche durch die Recursionsformel

$$(4.)\qquad c_n^{(\lambda)} = c_n^{(\lambda-1)}-c_{n-1}^{(\lambda-1)}(n-1+(\lambda-1)(R-1)),\quad c_0^{(\lambda-1)}=1,\quad c_{\lambda-1}^{(\lambda-1)}=0$$
$$(n=1,\ldots,\lambda-1)$$

bestimmt werden. Hieraus erhält man für G_m folgenden Ausdruck:

$$(5.)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\quad\frac{d^m y}{d\zeta^m}\\
+\frac{1}{\zeta}\frac{d^{m-1}y}{d\zeta^{m-1}}\{c_1^{(m)}+p_1R\zeta^R\}\\
+\frac{1}{\zeta^2}\frac{d^{m-2}y}{d\zeta^{m-2}}\{c_2^{(m)}+p_1R\zeta^R c_1^{(m-1)}+p_2(R\zeta^R)^2\}\\
+\frac{1}{\zeta^3}\frac{d^{m-3}y}{d\zeta^{m-3}}\{c_3^{(m)}+p_1R\zeta^R c_2^{(m-1)}+p_2(R\zeta^R)^2c_1^{(m-2)}+p_3(R\zeta^R)^3\}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
+\frac{1}{\zeta^{m-1}}\frac{dy}{d\zeta}\{c_{m-1}^{(m)}+p_1R\zeta^R c_{m-2}^{(m-1)}+p_2(R\zeta^R)^2c_{m-3}^{(m-2)}+\cdots+p_{m-1}(R\zeta^R)^{m-1}\}\\
+\frac{1}{\zeta^m}\quad y\quad\{p_m(R\zeta^R)^m\}.
\end{array}\right.$$

Nach den über die Coefficienten p gemachten Voraussetzungen enthalten die Entwickelungen von u, v, w nach Potenzen von ζ nur Potenzen mit positiven ganzzahligen Exponenten; die Grösse p_α wird für $\zeta=0$ höchstens in der Ordnung αR unendlich. Demnach wird der Coefficient von $\frac{d^{m-\alpha}y}{d\zeta^{m-\alpha}}$ in (5.) für $\zeta=0$ höchstens in αter Ordnung unendlich, also ist G_m bei $\zeta=0$

ein regulärer Differentialausdruck. Bei $x = \infty$ wird $x = \frac{1}{t}$ in F_m gesetzt, daher

$$(6.) \qquad F_m(y,\ u,\ v,\ w,\ x) = \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-m} F'_m(y,\ u,\ v,\ w,\ t).$$

Der Ausdruck F'_m geht aus (5.) hervor für $\zeta = t$, $R = -1$. Nach den über die Coefficienten p gemachten Voraussetzungen bleiben die oben genannten Functionen u', v', w' für $t = 0$ endlich, p_α geht für $x = t^{-1}$ in den oben beschriebenen Ausdruck $t^\alpha \frac{H'_\alpha(t, u', v', w')}{K'_\alpha(t)}$ über. Daher nimmt der Coefficient von $\frac{d^\alpha y}{dt^\alpha}$ in F'_m die Form $\frac{H''_\alpha(t, u', v', w')}{K''_\alpha(t)}$ an, wo H''_α und K''_α ganze rationale Ausdrücke sind, und $K''_\alpha(t)$ für $t = 0$ höchstens in αter Ordnung verschwindet. Man kommt also nun auf denselben Fall wie bei $x = a$ zurück.

6.

Homogene lineare Differentialgleichungen mit regulärem Differentialausdrucke.

Es werde nun die homogene lineare Differentialgleichung

$$F_m(y,\ u,\ v,\ w,\ x) = 0$$

untersucht, wo F_m ein regulärer Differentialausdruck (No. 5) ist.

I. Bei einem singulären Punkte $x = a$ ist dann gemäss No. 3 I. für jeden Complex von R zusammenhängenden Combinationen der Zweige von u, v, w die dort angegebene Differentialgleichung (1.)

$$(1.) \qquad G_m(y,\ u,\ v,\ w,\ \zeta) = 0$$

aufzustellen, deren Coefficienten nach Einsetzung der Entwickelungen der algebraischen Functionen u, v, w Potenzreihen in Bezug auf ζ mit ganzzahligen Coefficienten sind, G_m ist bei $\zeta = 0$ regulär. — In Betreff der Entwickelungen einer algebraischen Function vgl. die Abhandlungen des Verfassers Bd. 104, 108, 112 dieses Journals. — Aus (1.) erfolgt die Entwickelung der Integrale, die zu einer Gruppe der Wurzeln der Exponentengleichung gehören, welche sich nur um ganze Zahlen unterscheiden. Diese Wurzeln seien r_1 bis r_s und so geordnet, dass der reelle Theil der vorhergehenden nicht kleiner als der der folgenden ist. Die Integrale werden durch die Ausdrücke gegeben (vgl. Abh. Bd. 96 No. 1):

$$(2^a.) \qquad v_1,\quad v_1\int v_2 d\zeta,\quad \ldots,\quad v_1\int d\zeta v_2 \ldots \int v_s d\zeta,$$

$$(2^b.) \qquad v_1 = \zeta^{r_1}\chi_1(\zeta),\quad v_n = \zeta^{r_n - r_{n-1} - 1}\chi_n(\zeta), \qquad (n = 2, \ldots, s)$$

wo die Grössen χ Entwickelungen der Form $c_0(1+\sum_1^\infty c_\alpha\zeta^\alpha)$ haben, c_0 willkürlich, c_α eindeutig bestimmt ist. Aus diesen Ausdrücken ergeben sich, indem bei den Integrationen das constante Glied annullirt wird, die Entwickelungen der Integrale dieser Gruppe

$$(3.)\qquad \zeta^{r_n}\,\{\varphi_{n1}(\zeta)+\varphi_{n2}(\zeta)\log\zeta+\cdots+\varphi_{nn}(\zeta)(\log\zeta)^{n-1}\},\qquad (n=1,\ldots,s)$$

wo die Grössen φ Entwickelungen der Form $\sum_0^\infty g_\alpha\zeta^\alpha$ haben, welche in dem Ausdrucke (3.) nicht alle für $\zeta=0$ verschwinden und wo, wie sich durch Umgang um $\zeta=0$ in (2.), (3.) ergiebt, $\zeta^{r_n}\varphi_{n\alpha}$ $(\alpha>1)$ linear und homogen mit constanten Coefficienten durch die Grössen $\zeta^{r_h}\varphi_{hk}$ $(h<n)$ sich ausdrücken lässt. Die Reihen für φ convergiren in dem Kreise mit dem Radius $l^{\frac{1}{R}}$, wo l der Radius des Bezirkes von $x=a$ in $F_m=0$ ist (No. 3 I.). In dieser Weise seien insgesammt m linear unabhängige Integrale von $G_m=0$ bei $\zeta=0$ aufgestellt. Dann ergeben sich aus diesen Entwickelungen, indem

$$\zeta = (x-a)^{\frac{1}{R}}e^{\frac{2\pi iR'}{R}}\qquad (R'=0,\ldots,R-1)$$

gesetzt wird, die m Integrale von $F_m=0$ für jede der R Combinationen des Complexes in dem Bezirke von $x=a$ gemäss den Angaben in No. 3 I.

Die Grössen φ (3.) sind näher zu betrachten. Aus den Entwickelungen (2.) kann man beliebig viele Glieder in den Entwickelungen der Grössen φ (3.) bestimmen; dadurch dass wenigstens r_1-r_s+1 Anfangsglieder in den χ (2^b.) ermittelt sind und die successiven Integrationen bei diesen vorgenommen werden, kann man ersehen, welches die höchste Potenz des Logarithmus in (3.) wird (vgl. Abh. Bd. 96 S. 242, Bd. 107 S. 78). Für die Factoren der Logarithmenpotenzen in (3.) kann man nach Abh. Bd. 96 No. 15 eine homogene lineare Differentialgleichung, die bei $\zeta=0$ regulär ist, aus $G_m=0$ herleiten, welche dieselben erfüllen. Aus einer solchen Differentialgleichung ergeben sich Recursionsformeln für die Coefficienten in den Entwickelungen der Grössen φ, zugleich dient diese Differentialgleichung zur Werthberechnung derselben Grössen (vgl. IV.). Kommen keine Logarithmen in den Integralen vor, so dient $G_m=0$ demselben Zwecke. Bei Herleitung jener Differentialgleichung werden die Differentialquotienten von u (ebenso bei v, w) unter der Form $\frac{H(\zeta,u)}{K(\zeta)}$ (H und K ganze rationale Ausdrücke) vermittelst der Gleichung von u ausgedrückt. Die Coefficienten der genannten

Differentialgleichung ergeben sich unter der Form $\frac{H(\zeta, u, v, w)}{K(\zeta, u, v, w)}$, wo H und K ganze rationale Ausdrücke sind.

Es tritt bei Herleitung letzterer Differentialgleichung die Aufgabe auf, *zu beurtheilen, ob ein ganzer rationaler Ausdruck von ζ und den Functionen u, v, w von ζ identisch verschwindet.* Diese Aufgabe, die auch in der dritten Abtheilung vorkommt, ist in folgender Weise zu behandeln. S sei ein solcher Ausdruck. Es werden die $\alpha\beta\gamma$ Producte $u^{\alpha'}v^{\beta'}w^{\gamma'} = \omega_{\alpha'\beta'\gamma'}$ $(\alpha' = 0, \ldots, \alpha-1,\ \beta' = 0, \ldots, \beta-1,\ \gamma' = 0, \ldots, \gamma-1)$ aufgestellt, alsdann die $\alpha\beta\gamma$ Grössen $S\omega_{\alpha'\beta'\gamma'}$ vermittelst der Gleichungen von u, v, w als homogene lineare Ausdrücke jener $\alpha\beta\gamma$ Grössen $\omega_{\alpha'\beta'\gamma'}$ ausgedrückt mit Coefficienten, die ganze rationale Functionen von ζ sind. Man erhält dadurch ein System von $\alpha\beta\gamma$ Gleichungen, welche die $\alpha\beta\gamma$ Grössen $\omega_{\alpha'\beta'\gamma'}$, unter denen der Werth 1 ist, linear und homogen enthalten. Die Determinante dieses Systems ist gleich Null, wodurch für S eine Gleichung mit ganzen rationalen Functionen von ζ als Coefficienten und dem Coefficienten von $S^{\alpha\beta\gamma}$ gleich $(-1)^{\alpha\beta\gamma}$ hervorgeht. In dieser Gleichung muss, wenn S identisch verschwinden soll, zunächst der Coefficient von S^0 verschwinden; alsdann sei die höchste Potenz von S, die in allen Gliedern vorkommt, weggestrichen. In der übrigbleibenden Gleichung sei ein Punkt ζ_0 in dem Entwickelungsgebiete von u, v, w genommen, in welchem das absolute Glied nicht verschwindet. Damit S identisch verschwindet, ist nothwendig und hinreichend, dass in dem Punkte ζ_0 dem Modul nach S kleiner ist als eine Grösse unterhalb der kleinsten Wurzel der Gleichung. Der Werth von u (ebenso bei v, w) in der Entwickelung von u durch die von ζ abhängende Potenzreihe in dem Punkte ζ_0 wird nach Abh. Bd. 91 No. 3 II^a. mit beliebiger Annäherung berechnet, wobei eine dazu erforderliche positive Grösse, die den Modul von u übertrifft, aus der Gleichung von u bekannt wird.

Wenn auf diese Weise für den Nenner $K(\zeta, u, v, w)$ in einem Coefficienten der oben genannten Differentialgleichung eine Gleichung hergeleitet ist, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von ζ sind, der Anfangscoefficient gleich 1, das absolute Glied nicht identisch Null, so sei der höchste Exponent von ζ in den Coefficienten gleich n, dann kann die Anfangspotenz von ζ in der Entwickelung von K keine höhere als die $n$te sein, dieselbe sei ν. Es werde nun $u = \sum_0^\nu c_\lambda \zeta^\lambda + \zeta^{\nu+1} u'$ gesetzt, ebenso bei v und w, so nimmt K die Form an $c\zeta^\nu(1+\zeta K'(\zeta, u', v', w'))$, wo K' ein ganzer

rationaler Ausdruck. Der Zähler in dem Coefficienten muss, da die betreffende Differentialgleichung bei $\zeta = 0$ regulär ist, unter der Form $\zeta^{\nu-\alpha} H'(\zeta, u', v', w')$, wo H' ein ganzer rationaler Ausdruck, auftreten bei dem Differentialquotienten, der um α niedriger als der höchste ist. —

Wie in der dritten Abtheilung gezeigt wird, giebt es eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, welcher die Integrale von $F_m = 0$ genügen. Wenn man dieselbe nach den dortigen Angaben aufstellen kann, so erhält man aus derselben durch $x - a = \zeta^R$ eine Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, welcher die Integrale von $G_m = 0$ genügen, und kann aus dieser nach Abh. Bd. 96 No. 15 eine Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten herleiten, welcher die Logarithmenpotenzen in (3.) genügen. Dieselben liefern Recursionsformeln für die Coefficienten der Entwickelungen, die eine constante Anzahl der Glieder enthalten.

II. Der Umgang in den bei $x = a$ aufgestellten Integralen um den Punkt $x = a$ geschieht, wie in No. 3 II angegeben. Das Resultat des Umganges in dem Ausdrucke (3.) um $\zeta = 0$ ist eine lineare homogene Verbindung mit constanten Coefficienten der Integrale (3.) für 1 bis n. Diese constanten Coefficienten ergeben sich successive aus den Integralen (2.), indem, wenn Y ein Ausdruck der Form (3.) ist, und das Resultat des Umganges durch $[Y]$ bezeichnet wird, die Function $\int Y d\zeta$, in deren Entwickelung das constante Glied annullirt ist, durch denselben Umgang in $\int [Y] d\zeta + c$ übergeht, wo in $\int [Y] d\zeta$ die Integrationsconstante annullirt ist, die Constante c direct durch den Umgang in $\int Y d\zeta$ bestimmt wird (vgl. Abh. Bd. 96 No. 19).

III. A) Die Integrale (3.) als Functionen von x betrachtet, werden nach No. 3 III in dem Gebiete des dort durch C bezeichneten Kreises, innerhalb dessen ausser $x = a$ kein singulärer Punkt liegt, dargestellt. Wenn dieser Kreis C durch eine lineare Substitution $x = f(\xi)$ conform auf den Kreis in der ξ-Ebene mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius 1 abgebildet wird, so dass dem Punkte $x = a$ der Punkt $\xi = 0$, einem Punkte $x = b$ auf der Peripherie von C der Punkt $\xi = 1$ entspricht (vgl. Abh. Bd. 96 No. 20), so werden die Integrale (3.) als Functionen von ξ betrachtet in dem Gebiete dieses letzteren Kreises dargestellt. Diese Darstellungen gehen aus den Ausdrücken der Integrale (13.) in No. 3 hervor, die von

der dort angegebenen Variablen ζ_1 abhängen, wo ζ_1 in dem Gebiete des Kreises um $\zeta_1 = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1 sich befindet. ***Um nun diese Ausdrücke herzustellen,*** ist in die Entwickelung (3.) für ζ die Variable ζ_1 gemäss No. 3 (10ᵃ.), (11.), (12.) einzuführen und nach Potenzen von ζ_1 anzuordnen. Die Entwickelungen dieser Functionen $\psi(\zeta_1)$ in No. 3 (13.) nach Potenzen von ζ_1 mit positiven ganzzahligen Exponenten convergiren in dem Kreise um $\zeta_1 = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1. Führt man in $G_m(y, u, v, w, \zeta) = 0$ für ζ die Variable ζ_1 ein, so erhält man eine Differentialgleichung, die bei $\zeta_1 = 0$ regulär ist. Dieselbe geht aus $F_m(y, u, v, w, x) = 0$ durch Substitution von $x - a = \frac{A\zeta_1^R}{1+B\zeta_1^R}$ (No. 3 (10ᵃ.)) hervor, enthält daher als Coefficienten ganze rationale Ausdrücke von u, v, w, deren Coefficienten rationale Functionen von ζ_1 sind. Wenn in der Gleichung von u der höchste Exponent von x der $h$te ist, so wird $u(1+B\zeta_1^R)^h = u'$ eingeführt, entsprechend bei v, w. Dann kann man aus dieser Differentialgleichung in derselben Weise, wie in I. bei (3.) nach Abh. Bd. 96 No. 15 eine solche Differentialgleichung herleiten, welcher die Factoren der Logarithmenpotenzen in den Ausdrücken No. 3 (13.) genügen, und welche bei $\zeta_1 = 0$ regulär ist. Dieselbe liefert Recursionsformeln für die Coefficienten in den Entwickelungen der Functionen $\psi(\zeta_1)$.

Wird für ζ_1 wieder $\zeta_1 = \xi^{\frac{1}{R}}$ in die Entwickelung einer Function $\psi(\zeta_1)$ eingeführt, so erhält man die Grösse No. 3 (14.), *wo die Functionen $\Psi(\xi)$ durch Potenzreihen mit positiven ganzzahligen Exponenten dargestellt sind, die in dem Kreise mit dem Radius 1 convergiren.* Der Kreis C soll nun auf der Peripherie *ausser dem Punkte $x = b$, welchem $\xi = 1$ entspricht, keinen singulären Punkt besitzen.* Dem Punkte $\xi = 1$ entsprechen in $\xi^{\frac{1}{R}} = \zeta_1$ die R Punkte $e^{\frac{2\pi i}{R}R'} = \omega^{R'}$ $(R' = 0, \ldots, R-1)$ auf der Peripherie des Kreises um $\zeta_1 = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1. Ueber die Peripherie dieses Kreises hinaus in einem Gebiete, welches keinen dieser Punkte enthält, bleiben die Functionen $\psi(\zeta_1)$ in No. 3 (13.) einwerthige und stetige analytische Functionen, ebenso die Zweige der Functionen $\psi(\omega^{R'}\xi^{\frac{1}{R}})$ abgesehen von $\xi = 1$ über den Kreis um $\xi = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1 hinaus. Setzt man nun für eine solche Function den Ausdruck No. 3 (14.)

$$(4.)\qquad \psi(\omega^{R'}\xi^{\frac{1}{R}}) = \Psi_0(\xi) + \Psi_1(\xi)\omega^{R'}\xi^{\frac{1}{R}} + \cdots + \Psi_{R-1}(\xi)(\omega^{R'}\xi^{\frac{1}{R}})^{R-1}, \quad (R' = 0, \ldots, R-1)$$

so ergiebt sich durch Auflösung dieses Systemes von R Gleichungen, dessen Determinante nicht verschwindet, nach den $\Psi(\xi)$, dass *die Functionen* $\Psi(\xi)$ *über die Peripherie des Kreises um* $\xi = 0$ *als Mittelpunkt mit dem Radius* 1 *hinaus in einem Gebiete, welches* $\xi = 1$ *nicht enthält, einwerthig und stetig bleiben.*

B) Nun werden die Integrale von $F_m(y, u, v, w, x) = 0$ bei dem Punkte $x = b$, der $\xi = 1$ entspricht, aufgestellt. Diese Integrale werden ferner nach No. 3 III. durch von $\xi - 1$ abhängende Ausdrücke gegeben. Die Herstellung letzterer Ausdrücke geschieht wie in III. A) bei $\xi = 0$.

In dem gemeinschaftlichen Gebiete der beiden Kreise um $\xi = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1 und um $\xi = 1$ als Mittelpunkt mit dem in No. 3 III. angegebenen Radius sollen die bei $x = a$ oder $\xi = 0$ entwickelten Integrale durch diejenigen bei $x = b$ oder $\xi = 1$ entwickelten ausgedrückt werden, welche derselben Combination der Zweige u, v, w angehören, die bei $x = a$ angenommen war. Die Fortsetzung eines bei $x = a$ entwickelten Zweiges von u (ebenso bei v, w) zu dem Punkte $x = b$ und die Ermittelung, in welchen der α verschiedenen Werthe von u in einem dem Punkt b benachbarten Punkte dieser Zweig übergeht, kann vermittelst der homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten für u, deren Ordnung gleich der Anzahl der linear unabhängigen Zweige von u ist, nach Abh. Bd. 104 No. 9 vollzogen werden. Nach No. 3 III. wird nun ein Integral bei $\xi = 0$ linear und homogen mit constanten Coefficienten durch m Integrale bei $\xi = 1$ ausgedrückt. Diese Gleichung wird $(m-1)$-mal nach ξ differentiirt und durch Auflösung des Gleichungssystemes nach den Constanten ergeben sich letztere Grössen.

Die Determinante der m linear unabhängigen Integrale und ihrer $m-1$ ersten Ableitungen möge, wenn die Integrale von einer Variablen x abhängig sind, durch D_x bezeichnet werden. Es sei, ebenso wie bei dem Punkte $x = a$ $(x-a)^{\frac{1}{R}} = \zeta$ gesetzt war, wenn bei $x = b$ ein Complex von ϱ zusammenhängenden Combinationen der Zweige von u, v, w, in Betracht kommt, $(x-b)^{\frac{1}{\varrho}} = \eta$ gesetzt. *Die Determinante der von* η *abhängenden Integrale, und die Determinante derselben Integrale, die von* $x-b$ *oder von* $\xi-1$ *abhängig sind, stehen in der Relation* (Abh. Bd. 87 S. 260)

$$(5^a.) \qquad D_x = \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^{\frac{m(m-1)}{2}} D_\eta$$

$$(5^b.)\qquad D_\xi = \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^{\frac{m(m-1)}{2}} D_\eta.$$

Der Coefficient von $\frac{d^{m-1}y}{d\eta^{m-1}}$ in der von η abhängenden Differentialgleichung für y, in welcher der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1 ist, sei durch P_1 bezeichnet, dann ist

$$(6.)\qquad D_\eta = ce^{-\int P_1 d\eta}.$$

$P_1 = \frac{(P_1\eta)_{\eta=0}}{\eta} + \mathfrak{P}(\eta)$, wo $\mathfrak{P}(\eta)$ ein Ausdruck der Form $\frac{H(\eta, u', v', w')}{K(\eta)}$ ist, H und K ganze rationale Ausdrücke, K für $\eta = 0$ von Null verschieden, die u', v', w' in ähnlicher Weise, wie in I. (Schluss) aus u, v, w hervorgehen. $(P_1\eta)_{\eta=0}$ ist gemäss der Exponentengleichung gleich $\frac{m(m-1)}{2} - \Sigma r$, wo Σr die Summe der Wurzeln dieser Gleichung ist. Der Ausdruck $-\int_0^\eta \mathfrak{P}(\eta)d\eta$ wird in der Umgebung von η durch eine Reihe $\sum_1^\infty c_\alpha\eta^\alpha$ dargestellt. Der constante Factor c in (6.) wird hier dadurch bestimmt, dass mit den von η abhängenden Ausdrücken der m Integrale der verschiedenen Gruppen, die den Ausdrücken (3.) bei $\zeta = 0$ entsprechen, die Determinante aufgestellt wird, in derselben die Glieder, welche Logarithmen enthalten, weggelassen werden und, nachdem der Factor $\eta^{\Sigma r - \frac{m(m-1)}{2}}$ herausgenommen ist, das constante Glied ermittelt wird. Um den Ausdruck (5ᵃ.) zu erhalten, wird dann $\log\eta = \frac{1}{\varrho}\log(x-b)$ gesetzt, hierdurch geht die Entwickelung von $-\int_0^\eta \mathfrak{P}(\eta)d\eta$ über in

$$(7.)\quad f_1(x-b)(x-b)^{\frac{1}{\varrho}} + \cdots + f_{\varrho-1}(x-b)(x-b)^{\frac{\varrho-1}{\varrho}} + f_\varrho(x-b)(x-b)^{\frac{\varrho}{\varrho}},$$

wo die Entwickelungen der Grössen $f(x-b)$ nach Potenzen von $x-b$ positive ganzzahlige Exponenten enthalten und in dem Bezirke von $x = b$ convergiren. An Stelle von $\frac{1}{\varrho}\log(x-b)$ wird dann $\frac{1}{\varrho}\log(x-b) + \frac{2\pi i\varrho'}{\varrho}$, $(\varrho' = 0, \ldots, \varrho-1)$ gesetzt, wodurch die Determinante D_x, die den ϱ Combinationen entspricht, als Function von $x-b$ hervorgeht. Um den Ausdruck (5ᵇ.) D_ξ zu erhalten, wird in D_η für η die Grösse $\eta_1 = (\xi-1)^{\frac{1}{\varrho}}$ eingeführt, die zu η dieselbe Beziehung hat, wie in No. 3 III. die Grösse ζ_1 zu ζ.

Die Entwickelung von $-\int_0^\eta \mathfrak{P}(\eta)d\eta$ geht dadurch in eine der Form $\sum_1^\infty k_\alpha \eta_1^\alpha$ über und diese wird durch $\eta_1 = (\xi-1)^{\frac{1}{\varrho}}$ gleich

$$(8.)\quad g_1(\xi-1)(\xi-1)^{\frac{1}{\varrho}}+\cdots+g_{\varrho-1}(\xi-1)(\xi-1)^{\frac{\varrho-1}{\varrho}}+g_\varrho(\xi-1)(\xi-1)^{\frac{\varrho}{\varrho}},$$

wo die Entwickelungen der Grössen g nach Potenzen von $\xi-1$ positive ganzzahlige Exponenten enthalten und in dem in No. 3 III. genannten Kreise convergiren, in welchem auch die von $\xi-1$ abhängenden Entwickelungen der Integrale gelten. $\log\eta$ ist entsprechend No. 3 (11.), (15.) gleich $\frac{1}{\varrho}\log(\xi-1)+\mathfrak{Q}(\xi-1)$, wo $\mathfrak{Q}$ eine in demselben Kreise convergirende Potenzreihe von $\xi-1$ mit positiven ganzzahligen Exponenten ist. An Stelle von $\frac{1}{\varrho}\log(\xi-1)$ wird dann $\frac{1}{\varrho}\log(\xi-1)+\frac{2\pi i\varrho'}{\varrho}$ $(\varrho' = 0, \ldots, \varrho-1)$ gesetzt. Damit ist die Determinante D_ξ, die den ϱ Combinationen entspricht, als Function von $\xi-1$ dargestellt.

C) *Uebergang auf $\xi = 1$ in den Ausdrücken der Constanten.* Nach den in III. B) gemachten Angaben war ein Integral bei $\xi = 0$ durch m Integrale bei $\xi = 1$ linear und homogen mit constanten Coefficienten ausgedrückt. Diese Gleichung wird $(m-1)$-mal nach ξ differentiirt, alsdann das Gleichungssystem nach den Constanten aufgelöst. In den hierdurch hervorgehenden Ausdrücken soll nun der Uebergang auf $\xi = 1$ vorgenommen werden. Hierbei wird das in Abh. Bd. 87 No. 3, 4, 10 angegebene Verfahren angewandt.

Das Integral bei $\xi = 0$ sei durch y_0, die m Integrale bei $\xi = 1$ seien durch y_1 bis y_m bezeichnet, die Determinante der letzteren und ihrer $m-1$ ersten Ableitungen durch D. Man hat dann

$$(9.)\qquad \frac{d^\alpha y_0}{d\xi^\alpha} = c_1\frac{d^\alpha y_1}{d\xi^\alpha}+c_2\frac{d^\alpha y_2}{d\xi^\alpha}+\cdots+c_m\frac{d^\alpha y_m}{d\xi^\alpha}. \qquad (\alpha = 0, \ldots, m-1)$$

Hieraus folgt, wenn D_{rs} der Coefficient von $\frac{d^r y_s}{d\xi^r}$ in D ist,

$$(10.)\qquad c_b = \frac{D_{0b}}{D}y_0+\frac{D_{1b}}{D}\frac{dy_0}{d\xi}+\cdots+\frac{D_{m-1,b}}{D}\frac{d^{m-1}y_0}{d\xi^{m-1}}. \qquad (b = 1, \ldots, m)$$

Der Ausdruck des Integrales y_0 ist in No. 3 (13.) bis (16.) enthalten für einen bestimmten Werth von R', der einer der R Combinationen der Zweige von u, v, w angehört, dieser Ausdruck ist gemäss den Angaben in III. A) hergestellt. Die Ausdrücke der Integrale y_1 bis y_m sind folgende. Die bei $x = b$ aufgestellten, von $\eta = (x-b)^{\frac{1}{\varrho}}$ gemäss den in III. B) gemachten An-

grösser als $-\frac{\sigma}{\varrho}+\mathfrak{a}$ haben. Der beibehaltene Theil von $(\xi-1)^{-\frac{\lambda}{\varrho}} D_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ werde durch $F_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ bezeichnet.

$$(14.)\qquad F_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(\xi-1)^{\frac{r_\mathfrak{b}}{\varrho}-\mathfrak{a}}$$

enthält in den Factoren der Logarithmenpotenzen nur Potenzen von $(\xi-1)^{\frac{1}{\varrho}}$ mit positiven ganzzahligen Exponenten. Die in $F_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ vorkommenden Functionen $(\xi-1)^{\mu}$, $(\log(\xi-1))^{n}$, n ganzzahlig und positiv, haben Entwickelungen der Form $\sum_{0}^{\infty} k_{\alpha}\xi^{\alpha}$, die in dem Kreise um $\xi=0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1 convergiren, daher hat $F_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ gleichfalls eine solche Entwickelung, und man erhält aus (12.) zunächst

$$(15.)\qquad c_\mathfrak{b} C = \lim_{\xi=1}\left\{F_{0\mathfrak{b}}y_0+F_{1\mathfrak{b}}\frac{dy_0}{d\xi}+\cdots+F_{m-1,\mathfrak{b}}\frac{d^{m-1}y_0}{d\xi^{m-1}}\right\}.$$

Hier tritt für y_0 die oben genannte Entwickelung ein; wenn die bezügliche Entwickelung No. 3 (13.) zu dem Exponenten r gehört, so ist der Anfangsexponent in der von ξ abhängenden Entwickelung von y_0 gleich $\frac{r}{R}$. In Bezug auf die Factoren der Logarithmenpotenzen in letzterer Entwickelung gilt nun ferner Folgendes. Die von der Variablen ζ_1 abhängende Entwickelung von y_0, die in III. A) betrachtet war, genügt der dort angegebenen aus $F_m=0$ durch Einführung von ζ_1 hervorgehenden Differentialgleichung, welche bei $\zeta_1=0$ regulär ist. Aus letzterer Differentialgleichung seien m Integrale unter der Form (2.), (3.) aufgestellt, und in dieselben für ζ_1 wieder die Variable ξ eingeführt gemäss No. 3 (15.), (16.). Für diejenigen dieser Integrale, bei denen R' in $\frac{1}{R}\log\xi+\frac{2\pi i R'}{R}$ der hier betrachteten Combination der Zweige angehört, gilt die Relation (13.). Um aber, was für das Folgende nothwendig ist, eine entsprechende Relation zu erhalten, die von dieser Combination unabhängig ist, seien bei $\eta=0$ die Exponentengleichungen aller Differentialgleichungen, welche den dort auftretenden Complexen angehören (No. 3 I.), aufgestellt, und nachdem bei den Wurzeln jeder dieser Exponentengleichungen eine $\frac{\sigma}{\varrho}$ (13.) entsprechende Grösse gebildet ist, sei die kleinste derselben genommen, diese sei $\varkappa$. Alsdann gilt für alle vorhin genannten von ξ abhängenden Integrale, welche durch die Werthe von $\frac{1}{R}\log\xi+\frac{2\pi i R'}{R}$ für $R'=0$ bis $R-1$ den R Combinationen

des Complexes entsprechen, eine Relation der Art wie (9.), wonach die Integrale durch bei $\xi = 1$ entwickelte ausgedrückt werden. Hieraus folgt für jene Integrale die Relation (13.), in welcher $\frac{\sigma}{\varrho}$ durch $\varkappa$ ersetzt ist. Vermittelst der linearen Relationen zwischen den Factoren der Logarithmenpotenzen in diesen Integralen wird jeder solcher Factor $\xi^{\frac{\delta}{R}}\psi(\xi^{\frac{1}{R}}) = f$ als ganze rationale Function der Integrale und $\log\xi$ ausgedrückt und es ergiebt sich die Relation

$$\lim_{\xi=1}\frac{d^{\alpha}f}{d\xi^{\alpha}}(\xi-1)^{-\varkappa+\alpha+\epsilon} = 0$$

successive für $\alpha = 0, \ldots, m-1$. Dieselbe Relation gilt nun für die Factoren der Logarithmenpotenzen in dem Ausdrucke von y_0 bei jedem R' in $\frac{1}{R}\log\xi+\frac{2\pi iR'}{R}$ $(R' = 0, \ldots, R-1)$, da diese Factoren sich homogen und linear mit constanten Coefficienten aus jenen Grössen f zusammensetzen. Alsdann folgt aus dem Gleichungssystem (4.) für die dort vorkommenden Grössen $\Psi(\xi)$ successive für $\alpha = 0, \ldots, m-1$

$$\text{(16.)}\qquad \lim_{\xi=1}\left\{\frac{d^{\alpha}\xi^{\frac{r}{R}}\Psi(\xi)}{d\xi^{\alpha}}(\xi-1)^{-\varkappa+\alpha+\epsilon}\right\} = 0,$$

wo ϵ eine beliebig kleine positive Grösse ist. Die in dem Ausdrucke von y_0 vorkommenden Grössen $(\log\xi)^n\xi^{\frac{\nu}{R}} = (\log(1+\xi-1))^n(1+\xi-1)^{\frac{\nu}{R}}$, wo n und ν positive ganze Zahlen, werden nach Potenzen von $\xi-1$ entwickelt. Dann sind in diesen Entwickelungen in (15.) die Glieder, deren Exponenten grösser als $\frac{r_b}{\varrho}-\varkappa$ sind, gemäss (14.) und (16.) wegzulassen. Man erhält, wenn $\left\{\xi^{\frac{r}{R}-m+1}\right\}_{\xi=1} = m_0$, $\left\{(\xi-1)^{-\frac{r_b}{\varrho}}\right\}_{\xi=0} = m_b$ und die Constante $m_0 m_b = M_b$ gesetzt wird, aus (15.), wenn man noch mit $m_0\xi^{-\frac{r}{R}+m-1}$ multiplicirt,

$$\text{(17.)}\qquad c_b C = M_b \lim_{\xi=1}\mathfrak{P}_b(\xi),$$

wo nun $M_b\mathfrak{P}_b(\xi)$ eine Potenzreihe nach Potenzen von ξ mit positiven ganzzahligen Exponenten ist, die in dem Kreise um $\xi = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1 convergirt, und *die Function* $M_b\mathfrak{P}_b(\xi)$ gemäss den bei (4.) über die Functionen $\Psi(\xi)$ gemachten Angaben *über die Peripherie dieses Kreises hinaus in einem Gebiete, welches* $\xi = 1$ *nicht enthält, eine einwerthige und stetige analytische Function bleibt.* Die in (15.) vorkommenden Grössen

$\xi^{\frac{r}{R}}\Psi(\xi)$ haben gemäss dem oben vor (16.) Gesagten eine Darstellung als ganze rationale Ausdrücke von bei $\xi=1$ entwickelten Integralen von $F_m=0$ und von Grössen $(\log\xi)^n$, ξ^r, welche nach Potenzen von $\xi-1$ mit positiven ganzzahligen Exponenten entwickelbar sind. Daraus folgt gemäss (15.), dass die Function $M_{\mathfrak{b}}\mathfrak{P}_{\mathfrak{b}}(\xi)$ in (17.) bei $\xi=1$ einen Ausdruck hat *von der Form* einer Summe regulärer, von $\xi-1$ abhängender Integrale. Es ergiebt sich ferner aus der Art der Herstellung von $M_{\mathfrak{b}}\mathfrak{P}_{\mathfrak{b}}(\xi)$, wenn man die aus (10.) und (12.) weggelassenen Grössen betrachtet, dass die Function $M_{\mathfrak{b}}\mathfrak{P}_{\mathfrak{b}}(\xi)$ nach beliebig oft, aber in endlicher Anzahl gemachten Umgängen um $\xi=1$ bei Annäherung von ξ an 1 gegen $c_{\mathfrak{b}}C$ convergirt. Daraus folgt, dass in dem Ausdrucke von $M_{\mathfrak{b}}\mathfrak{P}_{\mathfrak{b}}(\xi)-c_{\mathfrak{b}}C$ unter der Form einer Summe regulärer, von $\xi-1$ abhängender Integrale *die Exponenten im reellen Theile grösser als Null sein müssen.* Die angegebenen Eigenschaften der Function $M_{\mathfrak{b}}\mathfrak{P}_{\mathfrak{b}}(\xi)$ sind hinreichend, *dass die Potenzreihe für $M_{\mathfrak{b}}\mathfrak{P}_{\mathfrak{b}}(\xi)$ noch für $\xi=1$ convergirt und den Werth $c_{\mathfrak{b}}C$ darstellt* (vgl. Abh. Bd. 87 No. 10, Bd. 100 No. 1).

Wenn auf der Peripherie des Kreises um $\xi=0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1 noch andere den singulären Punkten entsprechende Punkte ausser $\xi=1$ lägen, so könnte die Reihe $\mathfrak{P}_{\mathfrak{b}}(\xi)$ in allen Punkten der Peripherie divergiren. Es genügt dieses bei rationalen Coefficienten der Differentialgleichung zu zeigen. Die Exponenten r_1 bis r_m bei $x=b$, $\xi=1$ sollen sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden, so dass dort kein Logarithmus in den Integralen vorkommt. Der Grad, den die Polynome (14.) erreichen können, hängt von den Exponenten r_1 bis r_m ab und ist unabhängig von der Anzahl der singulären Punkte. Das Maximum dieser Grade sei N. Auf der Peripherie sollen ausser $\xi=1$ wenigstens $N+1$ Punkte liegen, die singulären Punkten entsprechen, und in letzteren singulären Punkten die Exponenten sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden und im reellen Theile $\leqq -2$ sein, in $x=a$, $\xi=0$ sollen sich die Exponenten nicht um ganze Zahlen unterscheiden, so dass y_0 keinen Logarithmus enthält. Nun muss nach (15.) die Function $\mathfrak{P}_{\mathfrak{b}}(\xi)$ über die Peripherie des genannten Kreises hinaus einwerthig und stetig bleiben, wenn dabei eine endliche Anzahl von Punkten auf der Peripherie ausgenommen wird. Bei letzteren Punkten hat $\mathfrak{P}_{\mathfrak{b}}(\xi)$ gemäss der Darstellung von y_0 in den singulären Punkten einen Ausdruck von der Form einer Summe regulärer Integrale, aber wenigstens bei einem dieser Punkte und einem $\mathfrak{P}_{\mathfrak{b}}(\xi)$ muss in jenem Ausdrucke der kleinste reelle

Theil der Exponenten $\leqq -2$ sein. Dieses ist hinreichend, dass diese Reihe auf der Peripherie divergirt (Abh. Bd. 100 No. 2).

IV. *Die Werthberechnung der Integrale und der Determinante derselben mit vorgeschriebener Annäherung.* Die in I. bei einem singulären Punkte aufgestellten Integrale und ihre Ableitungen sind in einem Punkte innerhalb des Bezirkes des singulären Punktes mit vorgeschriebener Annäherung zu berechnen. Für die Factoren der Logarithmenpotenzen kann man nach I. eine lineare homogene Differentialgleichung, welcher dieselben genügen, aufstellen, die bei $\zeta = 0$ regulär ist; kommen keine Logarithmen vor, so wird die Differentialgleichung $G_m = 0$ verwandt. Auf Grund einer solchen Differentialgleichung, welcher eine zu berechnende Function genügt, erfolgt die Werthberechnung dieser Function und ihrer Ableitungen nach den Angaben in Abh. Bd. 91 No. 3 II., Bd. 96 No. 18. Man bedarf zur Anwendung des in Abh. Bd. 91 No. 3 II. angegebenen Verfahrens der Kenntniss eines Werthes, der gleich oder grösser als der Modul der l. c. (22.) durch Q' bezeichneten Grössen ist. Dieselben haben hier die Form $\frac{H(\zeta, u'', v'', w'')}{1+\zeta K(\zeta, u'', v'', w'')}$, H und K ganze rationale Functionen, wo der Ausdruck $\zeta u'' = u' - (\zeta u')_{\zeta=0}$ ist und u' die in I. (Schluss) genannte Grösse ist, ebenso bei v'', w''. Wenn aus der Gleichung von u ein Werth M erhalten ist gleich oder grösser als der Modul von u in einem um $\zeta = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius ϱ geschlagenen Kreise, der innerhalb des Entwickelungsgebietes von $u = \sum_0^\infty c_\alpha \zeta^\alpha$ liegt, so ist $\operatorname{Mod} c_\alpha \leqq \frac{M}{\varrho^\alpha}$, daher $\operatorname{Mod} u'' \leqq \frac{M}{\varrho^{\nu+2}} \frac{1}{1-\frac{\varrho'}{\varrho}}$ für $\operatorname{Mod} \zeta \leqq \varrho' < \varrho$. Ebenso bei v'' und w''. Hiermit ergiebt sich ein Werth grösser als der Modul von H in einem Kreise um $\zeta = 0$ als Mittelpunkt. Einen Werth grösser als Modul von $(1+\zeta K(\zeta, u'', v'', w''))^{-1}$ bestimmt man, wenn $M' \geqq \operatorname{Mod} K$ und $1 - \operatorname{Mod} \zeta M' > 0$ ist, durch $(1 - \operatorname{Mod} \zeta M')^{-1}$. Auf die angegebene Weise erhält man die Werthberechnung der von ζ abhängenden Integrale und ihrer Ableitungen und dadurch gemäss $\zeta = (x-a)^{\frac{1}{R}}$ diejenige der von x abhängenden Functionen.

Bei einem nichtsingulären Punkte x_0 erhält man ebenfalls nach Abh. Bd. 91 No. 3 II. die Werthberechnung der Integrale und ihrer Ableitungen für das ganze Gebiet innerhalb des Bezirkes von x_0.

Wenn durch ein System von m linear unabhängigen Integralen, welche

bei einem singulären Punkte $x = a$ aufgestellt sind, ein bei einem nichtsingulären Punkte innerhalb des Bezirkes des singulären Punktes für eine Combination der Zweige von u, v, w entwickeltes Integral ausgedrückt wird, so ist der reciproke Werth der Determinante der bei dem singulärem Punkte aufgestellten Integrale zu berechnen. Diese Determinante D_x ist nach II. B)

$$(18.) \qquad D_x = \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^{\frac{m(m-1)}{2}} D_\zeta.$$

Die Determinante D_ζ wird wie D_η in II. B) ausgedrückt. Der Coefficient von $\frac{d^{m-1}y}{d\zeta^{m-1}}$ in der Differentialgleichung $G_m(y, u, v, w, \zeta) = 0$ sei durch p_1 bezeichnet und $p_1 = \frac{(p_1\zeta)_{\zeta=0}}{\zeta} + \mathfrak{P}(\zeta)$ gesetzt. Wenn nun das l. c. Gesagte berücksichtigt wird, so bleibt hier übrig die Berechnung von $e^{\pm\int_0^\zeta \mathfrak{P}(\zeta)\,d\zeta}$ zu geben. Ein Werth grösser als der Modul dieser Grösse ergiebt sich in der vorhin angegebenen Weise, alsdann tritt das Verfahren aus Abh. Bd. 91 No. 3 IIa ein. Ist umgekehrt ein Integral bei dem singulären Punkte durch ein System von m linear unabhängigen Integralen bei einem nichtsingulären Punkte x_0 auszudrücken, so kann man letztere Integrale so wählen, dass ihre Determinante gleich 1 ist. In beiden Fällen kann man demnach die Constanten in den linearen Verbindungen der Integrale mit beliebiger Annäherung berechnen. Dasselbe findet statt, wenn ein bei einem nichtsingulären Punkte x_0 entwickeltes Integral durch ein System von m linear unabhängigen Integralen ausgedrückt wird, die bei einem beliebigen anderen nichtsingulären Punkte innerhalb des Bezirkes von x_0 und bei derselben Combination der Zweige von u, v, w aufgestellt sind. Ueber den Umgang um einen singulären Punkt s. II. — Durch Zusammensetzung solcher Substitutionen erhält man bei der Fortsetzung der Integrale die Werthe der Substitutionsconstanten mit beliebiger Annäherung (vgl. Abh. Bd. 96 No. 18).

V. Die Untersuchung bei $x = \infty$ wird durch die Substitution $x = \frac{1}{t}$ auf den Fall eines Punktes im Endlichen zurückgeführt gemäss No. 3 IV.

Die allgemeine Fortsetzung der Integrale erfolgt, wie in No. 3 V. angegeben ist.

Alle hier aufgestellten Operationen sind ausführbar, wenn die Constanten in der ursprünglichen Differentialgleichung $F_m(y, u, v, w, x) = 0$ algebraische Zahlen sind.

7.

Nichthomogene lineare Differentialgleichungen mit regulärem Differentialausdrucke.

Die nichthomogene lineare Differentialgleichung $F_m(y, u, v, w, x) = q$ ist zu behandeln, wo F_m ein regulärer Differentialausdruck (No. 5). Die Integration von $F_m = 0$ ist in No. 6 gegeben. Ueber den zweiten Theil q werden die Voraussetzungen gemacht, die in der Abhandlung des Verfassers in Bd. 107 dieses Journals über nichthomogene lineare Differentialgleichungen aufgestellt sind. Das zur Herstellung der Integrale angewandte Verfahren beruht, wie in Abh. Bd. 107, auf dem Durchgange durch die dort genannten bestimmten Integrale, welche zum Ausdrucke von Functionen, die durch unbestimmte Integration entstehen, dienen.

I. Gemäss den Auseinandersetzungen in No. 4 I. ist bei einem singulärem Punkte $x = a$ aus der dort angegebenen Differentialgleichung $F_m = q_a$ die Differentialgleichung l. c. (5.)

$$(1.) \qquad G_m(y, u, v, w, \zeta) = \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^m q_a$$

herzustellen, wo in q_a für $x-a$ die Grösse ζ^R einzusetzen ist, und man hat ein Integral dieser Differentialgleichung zu ermitteln. $G_m = 0$ ist bei $\zeta = 0$ regulär. Die Wurzeln der Exponentengleichung bei $\zeta = 0$ r_1, r_2 bis r_m seien so geordnet, dass diejenigen, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, aufeinander folgen, und unter diesen der reelle Theil der vorhergehenden nicht kleiner als der der folgenden ist. Nun werden als m linear unabhängige Integrale von $G_m = 0$ die Ausdrücke aufgestellt

$$(2^a.) \qquad v_1, \quad v_1\int v_2 d\zeta, \quad \ldots, \quad v_1\int d\zeta v_2\int\ldots\int v_m d\zeta$$

$$(2^b.) \qquad v_1 = (x-a)^{r_1}\chi_1(\zeta), \quad v_n = \zeta^{r_n - r_{n-1} - 1}\chi_n(\zeta), \qquad (n = 2, \ldots, m)$$

wo die χ von der Form $c_0\left(1+\sum_1^\infty c_a\zeta^a\right)$ sind, c_0 willkürlich, c_a eindeutig bestimmt. Diese Ausdrücke werden durch Einführung der Grössen

$$(3.) \qquad v_1 v_2 \ldots v_a = \mu_a$$

auf die Form

$$(4.) \qquad \mu_1, \quad \mu_1\int\mu_1^{-1}\mu_2 d\zeta, \quad \ldots, \quad \mu_1\int d\zeta\mu_1^{-1}\mu_2\int\ldots\int\mu_{m-1}^{-1}\mu_m d\zeta$$

gebracht. Die Ausdrücke der μ werden (Abh. Bd. 96 No. 14) durch Quotienten von Determinanten der Integrale dargestellt. Die Determinante

von m linear unabhängigen Functionen und ihrer $m-1$ ersten Ableitungen ist l. c. Differentialdeterminante dieser Functionen genannt worden (der erste Differentialquotient dieser Determinante ist selbst eine Determinante). Wird die Differentialdeterminante der r ersten Functionen (2ᵃ.) durch D_r bezeichnet, so ist

$$(5^a.)\qquad D_r = v_1^r v_2^{r-1} \dots v_r = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_r$$

$$(5^b.)\qquad \mu_\alpha = \frac{D_\alpha}{D_{\alpha-1}}.$$

Die Differentialdeterminanten in (5ᵇ.) werden direct mit den Integralen gebildet, in denselben sind die Glieder, welche Logarithmen enthalten, wegzulassen. Vermittelst (4.) ergiebt sich für (1.) das Integral (Abh. Bd. 96 No. 2):

$$(6.)\qquad \mu_1 \int d\zeta \mu_1^{-1} \mu_2 \int \cdots \int d\zeta \mu_{m-1}^{-1} \mu_m \int \mu_m^{-1} \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^m q_\alpha d\zeta.$$

Die Function q_α als Function von $x-a$ ist gemäss Abh. Bd. 107 No. 1 und 2 von der Form PQ_α. Die Function P ist allenthalben einwerthig mit einer endlichen Anzahl von Unstetigkeitspunkten und hat daher bei $x = a$ eine Entwickelung nach Potenzen von $x-a$ mit positiven und negativen ganzzahligen Exponenten. Q_α hat bei $x = a$ entweder eine Entwickelung der Form

$$(7.)\qquad (x-a)^\sigma \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha,$$

oder einen Ausdruck der Form

$$(8.)\qquad \nu_1 \int dx \nu_1^{-1} \nu_2 \int \cdots \int \nu_{\mathfrak{b}-1}^{-1} \nu_{\mathfrak{b}} dx,$$

wo die ν bei $x = a$ normale Elementarintegrale sind, das constante Glied bei den Integrationen jedesmal annullirt wird. Solcher Ausdrücke Q_α (7.) bezüglich (8.) treten ϱ auf, welche bei $x = a$ ϱ linear unabhängige Integrale einer l. c. angegebenen homogenen linearen Differentialgleichung ϱter Ordnung mit rationalen Coefficienten darstellen. Dieser Differentialgleichung genügen zugleich die Ausdrücke (8.) für $\mathfrak{b} = 1, 2, \dots, \mathfrak{b}$. Die Darstellung des Ausdruckes (8.) ist von der Form

$$(9.)\qquad (x-a)^\sigma \{f_1(x-a) + f_2(x-a)\log(x-a) + \cdots + f_n(x-a)(\log(x-a))^{n-1}\},$$

wo die f bei $x = a$ abgesehen von diesem Punkte einwerthig und stetig sind und in einem Kreisringe um $x = a$ als Mittelpunkt durch eine Summe bestimmter Integrale in endlicher Anzahl ausgedrückt werden (Abh. Bd. 96

No. 16). Es ist $q_\alpha = PQ_\alpha$ $(\alpha = 1, \dots, \varrho)$. In dem vermittelst bestimmter Integrale erhaltenen Ausdrucke von q_α ist $\log(x-a) = R\log\zeta$, $x-a = \zeta^R$ zu setzen. Man erhält dann weiter unter Anwendung bestimmter Integrale die Darstellung des Integrales (6.), indem bei den Integrationen in (6.) jedesmal das constante Glied annullirt wird, unter der Form

$$(10.)\qquad \zeta^r \{\varphi_1(\zeta) + \varphi_2(\zeta)\log\zeta + \dots + \varphi_\tau(\zeta)(\log\zeta)^{\tau-1}\},$$

wo r sich von σR in (7.) (9.) nur um eine ganze Zahl unterscheidet, die Functionen $\varphi(\zeta)$ bei $\zeta = 0$ abgesehen von diesem Punkte einwerthig und stetig sind und in einem Kreisringe um $\zeta = 0$ als Mittelpunkt durch eine Summe bestimmter Integrale in endlicher Anzahl ausgedrückt werden (vgl. Abh. Bd. 107 No. 3 I.). Diese Functionen $\varphi(\zeta)$ bleiben, abgesehen von $\zeta = 0$, einwerthig und stetig in dem Gebiete Z von ζ, welches in No. 3 III. bezeichnet worden, wobei der dort genannte Kreis C auf die Differentialgleichung $F_m = q$ zu beziehen ist, gemäss II. und Abh. Bd. 107 No. 2 I. Wenn der Bezirk des Punktes $x = a$ bei der Differentialgleichung $F_m = q$ den Radius l hat, so werden die Functionen $\varphi(\zeta)$ in dem Kreise um den Punkt $\zeta = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius $l^{\frac{1}{R}}$ durch Potenzreihen mit ganzzahligen positiven und negativen Exponenten entwickelt. Die Coefficienten in diesen Potenzreihen werden durch bestimmte Integrale ausgedrückt, die durch eine einfach unendliche Reihe ganzer rationaler Ausdrücke gegebener Constanten sich darstellen lassen (vgl. Abh. Bd. 107 No. 3 I). In (10.) ist alsdann gemäss den Angaben in No. 4 I. $\zeta = (x-a)^{\frac{1}{R}}$ zu setzen, und es ist weiter das dort auseinandergesetzte Verfahren anzuwenden, wodurch man Integrale von $F_m = q_\alpha$ $(\alpha = 1, \dots, \varrho)$ für die R zusammenhängenden Combinationen der Zweige von u, v, w eines Complexes erhält.

Die Functionen q_α genügen einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten (Abh. Bd. 107 No. 3 I.). Aus dieser und $F_m = q_\alpha$ erhält man eine homogene lineare Differentialgleichung für y, deren Coefficienten ganze rationale Ausdrücke in Bezug auf u, v, w und rationale in Bezug auf x sind. Wie in der dritten Abtheilung gezeigt wird, entsteht aus derselben eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten in x, welcher y genügt. Wenn man diese nach den dortigen Angaben herleiten kann, so erhält man aus derselben durch $x-a = \zeta^R$ eine solche mit rationalen Coefficienten in ζ, welcher das Inte-

gral (10.) genügt. Aus dieser Differentialgleichung kann man nach Abh. Bd. 96 No. 15 eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten in ζ herleiten, welcher die Factoren der Logarithmenpotenzen in (10.) genügen. Dieselbe liefert Recursionsformeln für die Coefficienten in den Entwickelungen der Functionen $\varphi(\zeta)$ mit constanter Anzahl der Glieder.

II. Der Umgang um $x = a$ in den in No. 4 I aufgestellten Integralen der Differentialgleichungen $F_m = q_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} = 1, \dots, \varrho)$ ist in No. 4 II. vorgenommen. Es ist zur Ausführung des dort Gesagten hier noch zu zeigen, wie in dem Integrale (10.) der Differentialgleichung (1.) das Resultat des Umganges um $\zeta = 0$ ausgedrückt wird. Zunächst ist einmal der Umgang um $\zeta = 0$ in $q_\mathfrak{a}$ zu vollziehen und zu dem Zwecke Rmal der Umgang um $x = a$ in (7.) bez. (8.). Das Resultat bei (8.) wird eine homogene lineare Verbindung mit constanten Coefficienten der aus (8.) für die Werthe $\mathfrak{b} = 1$, 2 bis $\mathfrak{b}$ sich ergebenden Entwickelungen, die denselben Exponenten abgesehen von einer ganzen Zahl enthalten; dieses Resultat ist dann noch durch die Ausdrücke (8.), die für $Q_\mathfrak{a}(\mathfrak{a} = 1, \dots, \varrho)$ aufgestellt sind, homogen und linear mit constanten Coefficienten darzustellen, was gemäss den über diese Ausdrücke gemachten Voraussetzungen nach Abh. Bd. 96 No. 21, 22 geschieht. Alsdann ist in (6.) ein Umgang um $\zeta = 0$ vorzunehmen und das Resultat durch lineare Verbindung der Integrale (6.) $(\mathfrak{a} = 1, \dots, \varrho)$ und der Integrale (4.) darzustellen. Das allgemeine Verfahren, die Constanten in den linearen Verbindungen bei dem Umgange in den Integralausdrücken (8.) und (6.) zu bestimmen, ist in No. 6 II. angegeben. Die Integrale (4.) sind dann noch durch die No. 6 I. (2.) aufgestellten der Gruppe, die denselben Exponenten abgesehen von einer ganzen Zahl enthält, auszudrücken, wobei zu beachten, dass die Differentialdeterminante der Integrale der Gruppe No. 6 (2.) gleich $v_1^s v_2^{s-1} \dots v_s$ ist; die Constanten werden in dem Punkte $\zeta = 0$ bestimmt.

III. Wenn gemäss No. 3 III. und No. 4 III. in das Integral (10.) die Variable ζ_1 eingeführt wird, wodurch der Ausdruck (10.) auf einen solchen der Form No. 3 (13.) kommt, so werden die Coefficienten in den Potenzreihen der dort durch $\psi(\zeta_1)$ bezeichneten Functionen durch bestimmte Integrale gegeben, in denen nach ζ_1 über einen Kreis, der den Nullpunkt enthält, integrirt wird. Diese Integrale werden dann, nachdem unter dem

Integralzeichen mit $\frac{d\zeta_1}{d\zeta}$ multiplicirt ist, auf Integrale in Bezug auf ζ über einen Kreis um $\zeta = 0$ als Mittelpunkt in dem Kreisringe, in welchem die eingehenden Functionen durch bestimmte Integrale dargestellt sind, zurückgeführt (vgl. Abh. Bd. 107 No. 3 II.). Recursionsformeln für die Coefficienten in diesen Entwickelungen erhält man auf dieselbe Weise, wie in I. angegeben.

Nachdem die in No. 3 III angegebene Variable ξ in die Integrale von $F_m = q$ eingeführt ist, geschieht die Bestimmung der Constanten bei dem Uebergange von $\xi = 0$ zu $\xi = 1$, wie in No. 4 III. und No. 6 III. B) gesagt ist. Falls bei $\xi = 0$ und $\xi = 1$ die Grössen q die Ausdrücke regulärer Integrale haben, so können in den Ausdrücken der Constanten solche Reductionen vorgenommen werden, wie in No. 6 III. C) (vgl. Abh. Bd. 107 No. 7.).

IV. In Bezug auf die Werthberechnung des Integrales (10.) und seiner Ableitungen ist zu beachten, dass die Grössen f in (9.) aus dem Integralausdrucke (8.), wo die ν normale Elementarintegrale sind, unter der Form einer Summe bestimmter Integrale hergeleitet werden, in denen $x-a = \zeta^R$ gesetzt wird. Damit kommt man des Weiteren auf diejenige Behandlung zurück, welche in Abh. Bd. 107 No. 4 auseinandergesetzt ist, und die sich auf das allgemeine einschlägige Verfahren in Abh. Bd. 96 No. 18 gründet. Bei der Ausführung kommt dann das in No. 6 IV. Bemerkte in Bezug auf die μ_α (5^b.) in Betracht.

V. Der Fall bei $x = \infty$ und die allgemeine Fortsetzung der Integrale sind in No. 3 und No. 4 behandelt.

Dritte Abtheilung.

Zurückführung einer homogenen linearen Differentialgleichung mit beliebigen algebraischen Coefficienten auf eine solche mit rationalen Coefficienten.

8.

Herleitung der homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, deren Integrale die linear unabhängigen Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung mit beliebigen algebraischen Coefficienten sind.

Es soll jetzt gezeigt werden, dass die linear unabhängigen Integrale jeder homogenen linearen Differentialgleichung $F_m(y, u, v, w, x) = 0$ (No. 3),

deren Coefficienten die in No. 1 angegebene Form $\frac{H(x,u,v,w)}{K(x)}$ haben, wo H und K ganze rationale Ausdrücke und u, v, w algebraische Functionen von der dort angegebenen Beschaffenheit sind, einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Functionen von x als Coefficienten genügen, deren Ordnung mit der Anzahl jener Integrale übereinstimmt, und wie man diese Differentialgleichung im allgemeinen ermitteln kann.

Die $\alpha\beta\gamma$ Combinationen der α Zweige von u, der β Zweige von v, der γ Zweige von w werden in einem Gebiete von x angenommen, wo diese Zweige und die Coefficienten der Differentialgleichung $F_m = 0$, die jeder Combination entsprechen, einwerthig und stetig sind. In diesem Gebiete von x giebt es bei jeder Combination m linear unabhängige Integrale von $F_m = 0$. Unter diesen $m\,\alpha\beta\gamma$ Functionen seien N linear unabhängig y_1 bis y_N. Es werde nun die Differentialgleichung

$$\text{(1.)} \qquad \frac{d^N y}{dx^N} + P_1 \frac{d^{N-1}y}{dx^{N-1}} + \cdots + P_N y = 0$$

aufgestellt und die Functionen y_1 bis y_N seien in dieselbe eingesetzt. Die Coefficienten P werden dann durch den Quotienten zweier Determinanten ausgedrückt, wo die Determinante im Nenner, diejenige der N linear unabhängigen Functionen y_1 bis y_N und ihrer $N-1$ ersten Ableitungen, nicht identisch verschwindet. In einem einfach zusammenhängenden Gebiete von x, welches keinen der singulären Punkte von $F_m = 0$ (No. 1) im Innern und auf der Begrenzung enthält, ist ein Coefficient P einwerthig und wird nur in einer endlichen Anzahl von Punkten und dort nur in endlicher Ordnung unendlich. Bei Umgehung eines der in endlicher Anzahl auftretenden singulären Punkte von $F_m = 0$ bleibt P einwerthig, da Zähler und Nenner in dem Ausdrucke für P sich um denselben constanten Factor ändern, die Determinante in den Substitutionen, durch welche die Functionen nach dem Umgange durch die ursprünglichen linear unabhängigen Functionen ausgedrückt werden. P bleibt daher allenthalben einwerthig und es handelt sich nun darum, das Verhalten von P in der Umgebung eines singulären Punktes von $F_m = 0$ zu untersuchen.

Zu dem Zwecke wird folgendes directe Verfahren eingeschlagen. Die $\alpha\beta\gamma$ Differentialgleichungen, die aus $F_m(y,u,v,w,x) = 0$ hervorgehen, wenn die $\alpha\beta\gamma$ Combinationen der Zweige von u, v, w eingesetzt werden, sollen untersucht werden. Diese Combinationen seien durch $u_{(r)}$, $v_{(r)}$, $w_{(r)}$

$(r = 1, \ldots, \alpha\beta\gamma)$ bezeichnet. Auf zwei dieser Differentialgleichungen für $r = 1, 2$ wird das Verfahren angewandt, durch welches aus zwei homogenen linearen Differentialgleichungen diejenige homogene lineare Differentialgleichung hergeleitet wird, welche die linear unabhängigen Integrale jener zu Integralen hat (s. Abh. Bd. 96 No. 7 I. II.). Die Coefficienten dieser dritten Differentialgleichung (der Coefficient der höchsten Ableitung ist immer gleich 1) treten unter der Form auf

$$(2.) \qquad H(x, u_{(1)}, v_{(1)}, w_{(1)}, u_{(2)}, v_{(2)}, w_{(2)}) : K(x, u_{(1)}, v_{(1)}, w_{(1)}, u_{(2)}, v_{(2)}, w_{(2)}),$$

wo H und K ganze rationale Functionen, K nicht identisch verschwindet. Dabei werden die Differentialquotienten von u (ebenso bei v, w) vermittelst der Gleichung von u unter der Form $\frac{H(x, u)}{K(x)}$, H und K ganze rationale Functionen ausgedrückt. Bei Herleitung dieser Differentialgleichung tritt die Aufgabe auf, zu beurtheilen, ob ein ganzer rationaler Ausdruck von $x, u_{(1)}, v_{(1)}, w_{(1)}, u_{(2)}, v_{(2)}, w_{(2)}$ identisch verschwindet. Diese Aufgabe wird, wie in No. 6 I. angegeben ist, gelöst. Es werden zu dem Zwecke die sämmtlichen Producte

$$(3.) \qquad u_{(1)}^{\alpha'} v_{(1)}^{\beta'} w_{(1)}^{\gamma'} u_{(2)}^{\alpha''} v_{(2)}^{\beta''} w_{(2)}^{\gamma''} \left\{ \begin{array}{lll} \alpha', & \alpha'' = 0, & \ldots, \quad \alpha-1, \\ \beta', & \beta'' = 0, & \ldots, \quad \beta-1, \\ \gamma', & \gamma'' = 0, & \ldots, \quad \gamma-1 \end{array} \right.$$

aufgestellt (ist $u_{(1)} = u_{(2)}$, so wird $\alpha'' = 0$ gesetzt, entsprechend bei v, w), alsdann ist weiter das dort angegebene Verfahren innezuhalten; die Entwickelungen von u, v, w werden bei einem nichtsingulären Punkte vorgenommen. Auf die hergeleitete Differentialgleichung und $F_m(y, u_{(3)}, v_{(3)}, w_{(3)}, x) = 0$ ist dann dasselbe Verfahren anzuwenden. Indem man so fortfährt, erhält man schliesslich die Differentialgleichung (1.) unter der Form, wo die Coefficienten P Ausdrücke der Gestalt

$$(4.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} P(x) = H(x, u_{(1)}, v_{(1)}, w_{(1)}, \ldots, u_{(\alpha\beta\gamma)}, v_{(\alpha\beta\gamma)}, w_{(\alpha\beta\gamma)}) \\ \qquad\qquad : K(x, u_{(1)}, v_{(1)}, w_{(1)}, \ldots, u_{(\alpha\beta\gamma)}, v_{(\alpha\beta\gamma)}, w_{(\alpha\beta\gamma)}) \end{array} \right.$$

haben, in denen H und K ganze rationale Ausdrücke, K nicht identisch verschwindet. Die in (4.) eingehenden Constanten setzen sich rational aus denen in F_m und in den Gleichungen von u, v, w zusammen. In H und K werden die Entwickelungen der Zweige durch Potenzreihen eingesetzt bei jedem singulären Punkte von $F_m = 0$ im Endlichen und bei $x = \infty$. Die Exponenten sind in allen Gliedern rationale Zahlen. Die Grössen H und K

werden dadurch gleich einer Summe einer endlichen Anzahl von Ausdrücken, bei welchen in dem einzelnen Ausdrucke die Exponenten der Glieder um positive ganze Zahlen grösser als der Anfangsexponent sind, von einem Ausdrucke zum andern die Exponenten sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden. In K kommt, da diese Grösse nicht identisch verschwindet, in einem einzigen Gliede der kleinste Exponent ν vor. Daher ist $\lim\limits_{x=a} . K(x-a)^{-\nu}$, bezüglich $\lim\limits_{x=\infty} . K\left(\frac{1}{x}\right)^{-\nu}$ eine von Null verschiedene Constante. Hieraus ergiebt sich, dass bei den singulären Punkten von $F_m = 0$ $P(x)$ mit einer gewissen Potenz von $x-a$ bez. $\frac{1}{x}$ mit ganzzahligem Exponenten multiplicirt endlich bleibt. Aus den angegebenen Eigenschaften von $P(x)$ folgt dann, dass $P(x)$ *eine rationale Function von x ist.*

Um nun diese rationale Function zu bestimmen, dienen folgende Betrachtungen. Der Nenner K in (4.) ist eine ganze rationale, nicht identisch verschwindende Function von x, den α Zweigen von u, den β Zweigen von v, den γ Zweigen von w. Wenn die unabhängige Variable x sich auf allen möglichen Wegen (die nicht durch die Windungspunkte gehen) bewegt und in das ursprüngliche Gebiet zurückkehrt, so können die dadurch hervorgehenden Ausdrücke K nicht identisch verschwinden. Man kann dadurch höchstens $\alpha!\ \beta!\ \gamma!$ in den Zeigern der Zweige verschiedene Ausdrücke erhalten (die verschiedenen Substitutionen der Zeiger, die dabei auftreten, bilden die Monodromiegruppe der zusammen betrachteten Functionen u, v, w). Diese Ausdrücke mit einander multiplicirt geben ein nicht identisch verschwindendes Product, welches allenthalben einwerthig, im Endlichen endlich, im Unendlichen mit einer gewissen Potenz von $\frac{1}{x}$ multiplicirt endlich ist, daher eine ganze rationale Function von x. Man kann diese Function, wenn der Ausdruck des Productes vorliegt, durch Einsetzen der Entwickelungen der Zweige bei $x = \infty$ bestimmen. Sonst ist der Ausdruck K mit solchen aus K durch Permutation der Zeiger in den Zweigen hervorgehenden Ausdrücken zu multipliciren, dass das Product eine symmetrische Function der Zweige von u, deren von v und deren von w wird, alsdann ist dieses Product mittelst der Gleichungen von u, v, w als ganze rationale Function von x auszudrücken. Ergiebt sich diese Function als nicht identisch Null, so kann man diese weiter verwenden.

Es sei also nun für $P(x)$ ein Ausdruck der Form

$$(5.)\qquad P(x) = H(x, u_1, \ldots, u_\alpha, v_1, \ldots, v_\beta, w_1, \ldots, w_\gamma) : K(x)$$

ermittelt, wo H und K ganze rationale Functionen sind, u_1 bis u_α die α Zweige von u, v_1 bis v_β die β Zweige von v, w_1 bis w_γ die γ Zweige von w. Da $H = P(x)\,K(x)$ und H für endliche Werthe von x endlich ist, so ist H eine ganze rationale Function von x. Um dieselbe zu bestimmen, werden die Entwickelungen der Zweige bei $x = \infty$ eingesetzt. Es ist dann der Theil, welcher die Potenzen von x mit Exponenten gleich oder grösser als Null enthält, herauszunehmen, und aus diesem sind die Glieder mit ganzzahligen Exponenten zusammenzufassen. Deren Summe ist die Function H.

Wenn die Differentialgleichung (1.) aufgestellt ist, so kann man nachträglich prüfen, ob die Integrale von $F_m = 0$ derselben genügen, indem man die Differentialquotienten von y bis zur Nten Ordnung vermittelst $F_m = 0$ als homogene lineare Ausdrücke von y, $\frac{dy}{dx}$ bis $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ darstellt mit Coefficienten, welche die Form der Coefficienten in F_m haben, und diese Ausdrücke in Differentialgleichung (1.) einsetzt. Alsdann ist nothwendig und hinreichend, dass im Resultate die Coefficienten von y bis $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ identisch verschwinden, was in der oben angegebenen Weise nachgewiesen wird. Diese Prüfung der Differentialgleichung (1.) genügt für die in der folgenden Nummer gemachte Anwendung.

Ein Beispiel für den Umstand, dass, während jeder der $\alpha\beta\gamma$ Combinationen der Zweige m linear unabhängige Integrale von $F_m = 0$ entsprechen, diese $m\alpha\beta\gamma$ Functionen nicht alle unter einander linear unabhängig zu sein brauchen, bietet die Differentialgleichung $F_m(y, u, v, w, x) = 0$, in welcher F_m durch das System homogener linearer Differentialausdrücke mit in x, u, v, w rationalen Coefficienten dargestellt ist

$$(6.)\qquad f(y, x) = s, \quad g(s, u, v, w, x),$$

worin f die Functionen u, v, w nicht enthält. Wenn die genannten $m\alpha\beta\gamma$ Functionen nicht alle unter einander linear unabhängig sind, so ergiebt sich nach dem obigen Verfahren und nach No. 1 für einzelne dieser Functionen eine homogene lineare Differentialgleichung niedrigerer als $m$ter Ordnung

mit algebraischen Coefficienten. Damit diese $m\alpha\beta\gamma$ Functionen linear unabhängig sind, ist nothwendig und hinreichend, dass ihre Differentialdeterminante (No. 7 I.) nicht identisch verschwindet. Man kann durch Entwickelung bei einem nichtsingulären Punkte zusehen, ob etwa in demselben diese Determinante nicht verschwindet. In diesem Falle vereinfacht sich das oben auseinandergesetzte Verfahren.

9.

Anwendung des in der vorigen Nummer aufgestellten Satzes.

I. Wenn in der Differentialgleichung $F_m(y, u, v, w, x) = 0$ (No. 3) F_m ein regulärer Differentialausdruck (No. 5) ist, so hat bei einem singulären Punkte $x = a$ bezw. $x = \infty$ ein bei einem Complex von R zusammenhängenden Combinationen der Zweige nach No. 6 I. aufgestelltes Integral von $F_m = 0$ die Form einer Summe von regulären Ausdrücken mit höchstens R Summanden der Art, dass die Exponenten von $x-a$ bez. $\frac{1}{x}$ in dem einzelnen Summanden sich nur um ganze Zahlen unterscheiden und von einem Summanden zum anderen nicht um ganze Zahlen verschieden sind. Die in der vorigen Nummer aufgestellte Differentialgleichung (1.) mit rationalen Coefficienten in x kann daher nur reguläre Integrale enthalten. Und umgekehrt, hat letztere Differentialgleichung nur reguläre Integrale, so ist F_m ein regulärer Differentialausdruck.

II. Die aus der Differentialgleichung $F_m(y, u, v, w, x) = 0$ herzuleitende homogene lineare Differentialgleichung (1.) der vorigen Nummer mit rationalen Coefficienten in x sei ermittelt. Für das Folgende wird nur die in No. 8 (Schluss) angegebene Prüfung, dass dieser Differentialgleichung die Integrale von $F_m = 0$ genügen, als vollzogen angesehen. Von Differentialgleichung (1.) in No. 8 wird nun folgende Voraussetzung gemacht. Nach dem in Abh. Bd. 96, zweite Abtheilung, auseinandergesetzten Verfahren habe sich ergeben, dass *diese Differentialgleichung in eine Anzahl getrennter Differentialgleichungen (Unterdifferentialgleichungen l. c. No. 10) zerfällt, bei denen in jeder ein normaler Differentialausdruck gleich Null gesetzt ist.* Man kann voraussetzen, dass die determinirenden Factoren von dem einen normalen Differentialausdrucke zu dem anderen von einander verschieden sind. Die aus solchen Differentialgleichungen hervorgehenden Integrale sind unter einander linear unabhängig und stellen ein System linear

unabhängiger Integrale der Differentialgleichung (1.) der vorigen Nummer dar (l. c. und Abh. Bd. 83 S. 100).

Man kann eine solche Differentialgleichung $F_m(y, u, v, w, x) = 0$ bilden, indem man in regulären Differentialgleichungen (No. 5) an Stelle von y die Grösse $\Omega^{-1}y$ einführt, wo Ω ein determinirender Factor ist, und diese determinirenden Factoren von einander verschieden nimmt, alsdann die Integrale dieser Differentialgleichungen bei derselben Combination der Zweige — diese Integrale sind unter einander linear unabhängig nach No. 8, No. 9 I. und Abh. Bd. 83 S. 100 — successive nach Abh. Bd. 96 No. 7 I. in einer Differentialgleichung $F_m(y, u, v, w, x) = 0$ vereinigt.

A) Von dieser Voraussetzung soll auf die Differentialgleichung $F_m(y, u, v, w, x) = 0$ Anwendung gemacht werden. Bei einem singulären Punkte $x = a$ derselben werde nach No. 3 $x - a = \zeta^R$ in die Differentialgleichung (1.) der vorigen Nummer eingesetzt, wodurch dieselbe in $S(y, \zeta) = 0$ übergehe. Die Integrale von $S(y, \zeta) = 0$ ergeben sich aus den vorhin genannten Unterdifferentialgleichungen, in denen dieselbe Substitution vorgenommen ist. Ein bei $x = a$ regulärer Differentialausdruck mit einwerthigen Coefficienten geht durch die Substitution $x - a = \zeta^R$ wieder in einen bei $\zeta = 0$ regulären über gemäss No. 5 (1.) bis (5.), ebenso bei $x = \infty$, $x = \frac{1}{t}$, durch die Substitution $t = \zeta^R$ No. 5 (6.); dasselbe ergiebt sich aus den Integralen. Die einzelne Unterdifferentialgleichung nimmt daher die Form an

$$(1.) \qquad e^w f(e^{-w}y, \zeta) = 0,$$

w gleich Null oder von der Form $\sum_1^n c_{-\alpha}\zeta^{-\alpha}$, $f(\bar{y}, \zeta)$ ein homogener linearer Differentialausdruck mit rationalen Coefficienten, welcher bei $\zeta = 0$ regulär ist. Ein solcher Differentialausdruck wie in (1.) $e^w f(e^{-w}y, \zeta)$ ist in Abh. Bd. 96 No. 9 ein *bei* $\zeta = 0$ *normaler Differentialausdruck* genannt worden, e^w *der determinirende Factor bei diesem Punkte*, $f(\bar{y}, \zeta)$ *der bei diesem Punkte reguläre Differentialausdruck.* Dementsprechend werden Integrale der Form $e^w\bar{y}$, wo $\bar{y}$ die Gestalt eines von ζ abhängenden regulären Integrales, ohne oder mit Logarithmen, hat, als *normale Integrale* bezeichnet, e^w *der determinirende Factor*, $\bar{y}$ *der reguläre Theil in dem normalen Integrale.* Die normalen Elementarintegrale (Abh. Bd. 96 No. 3 (5.)) sind die einfachsten normalen Integrale. Es hat also die Differentialgleichung $S(y, \zeta) = 0$ ein

System linear unabhängiger Integrale unter der Form normaler Integrale. Die Integrale der Differentialgleichung $G_m(y, u, v, w, \zeta) = 0$ No. 3 (1.) erfüllen $S(y, \zeta) = 0$. Daher sind die Integrale von $G_m = 0$ homogene lineare Verbindungen mit constanten Coefficienten von normalen Integralen. In einer solchen Verbindung ist jeder Ausdruck, der alle Glieder mit Potenzen von ζ umfasst, in denen die Exponenten sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, für sich Integral. Wenn letzterer Ausdruck aus der Summe mehrerer Summanden von der Form normaler Integrale besteht, in denen die determinirenden Factoren unter einander verschieden sind, so ist jeder dieser Summanden wieder Integral, wird der Ausdruck in die Differentialgleichung eingesetzt, so muss der Factor jeder Logarithmenpotenz verschwinden, desgleichen in diesem Factor der gesammte mit je einem der determinirenden Factoren multiplicirte Ausdruck (vgl. Abh. Bd. 83 S. 101). *Also hat die Differentialgleichung* $G_m(y, u, v, w, \zeta) = 0$ No. 3 (1.) *auch ein System linear unabhängiger Integrale unter der Form von normalen Integralen.*

Nachdem dieses festgestellt ist, werden nun die normalen Integrale aus $G_m = 0$ bestimmt. Die möglichen Werthe der determinirenden Factoren e^w ergeben sich aus $G_m = 0$ (Abh. Bd. 96 No. 4 I.), zu jedem derselben gehört eine Exponentengleichung in $e^{-w}G_m(e^w y, \zeta) = 0$, die Summe der Grade dieser Exponentengleichungen ist gleich oder kleiner als die Ordnung m (Abh. Bd. 96 No. 4 II.). Der zu einem wirklich bestehenden determinirenden Factor e^w gehörende reguläre Theil erfüllt die Differentialgleichung $e^{-w}G_m(e^w y, \zeta) = 0$, diese kann nicht mehr linear unabhängige reguläre Integrale haben, als der Grad der Exponentengleichung beträgt. In Verbindung mit dem Vorhergehenden folgt hieraus, dass jeder mögliche determinirende Factor e^w auch ein wirklicher sein muss, und dass zu demselben so viele linear unabhängige reguläre Theile gehören, als der Grad der Exponentengleichung in $e^{-w}G_m(e^w y, \zeta) = 0$ beträgt, ferner dass die Summe dieser Grade gleich m ist. Wenn aber eine Differentialgleichung so viele linear unabhängige reguläre Integrale hat, als der Grad der Exponentengleichung beträgt, so kann man ein System dieser Integrale in folgender Weise aufstellen. Der Grad der Exponentengleichung sei λ, dann besteht zunächst ein System von regulären Integralen unter der Form

$$(2^a.)\qquad v_1,\quad v_1\int v_2 d\zeta,\quad \ldots,\quad v_1\int d\zeta\, v_2\int\cdots\int v_\lambda d\zeta,$$

$$(2^b.)\qquad v_1 = \zeta^{r_1}\chi_1(\zeta),\quad v_n = \zeta^{r_n - r_{n-1} - 1}\chi_n(\zeta),\qquad (n = 2, \ldots, \lambda)$$

wo die χ Ausdrücke der Form $c_0\left(1+\sum_1^{\infty} c_\lambda \zeta^\lambda\right)$ haben, die Grössen r_1 bis r_λ die λ Wurzeln der Exponentengleichung sind. Aus den Ausdrücken (2ᵃ.) der Integrale folgt, dass dieselben eine homogene lineare Differentialgleichung λter Ordnung mit dem charakteristischen Index gleich Null bei $\zeta=0$ erfüllen, deren Exponentengleichung dieselben Wurzeln hat (Abh. Bd. 75 No. 5 (2.) und S. 279). Aus dieser Differentialgleichung folgt weiter, wenn die Wurzeln so geordnet werden, dass diejenigen, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, auf einander folgen, und in diesen der reelle Theil der vorhergehenden nicht kleiner als der der folgenden ist (wobei jede Gruppe von solchen, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, an die Spitze treten kann), dass alsdann wieder ein System regulärer Integrale unter der Form (2.), wo r_1 bis r_λ die angegebene Anordnung haben, besteht. In diesem Systeme aber werden aus der ursprünglichen Differentialgleichung $e^{-w}G_m(e^w y, \zeta)=0$ in den Entwickelungen der Functionen χ von der Form $c_0\left(1+\sum_1^{\infty} c_\lambda \zeta^\lambda\right)$ die Coefficienten c_λ eindeutig bestimmt, die c_0 sind willkürlich. *Damit sind also die Integrale von $G_m(y, u, v, w, \zeta)=0$ ermittelt.*

Jede zu einem determinirenden Factor gehörende Gruppe von regulären Theilen, in denen die Exponenten sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, wird gemäss No. 6 I. (2.), (3.) aufgestellt. Aus den oben genannten Unterdifferentialgleichungen (1.) von $S(y,\zeta)=0$ seien diejenigen, die denselben determinirenden Factor e^w enthalten, herausgenommen und aus diesen die bei $\zeta=0$ regulären Differentialausdrücke $f(\bar{y},\zeta)$. Alsdann sollen die Integrale der hieraus hervorgehenden Differentialgleichungen $f(\dot{y},\zeta)=0$ in einer homogenen linearen Differentialgleichung vereinigt werden (Abh. Bd. 96 No. 7 I.), $\Phi(y,\zeta)=0$, dieselbe ist eine solche mit rationalen Coefficienten, die bei $\zeta=0$ regulär ist. Die zu demselben determinirenden Factor e^w gehörenden regulären Integrale von $e^{-w}G_m(e^w y,\zeta)=0$ genügen der Differentialgleichung $\Phi(y,\zeta)=0$. Man kann nun letztere Differentialgleichung zur Darstellung und Werthberechnung jener Integrale gemäss den Angaben in No. 6 verwenden. Nun kann man die Integration der Differentialgleichung $F_m(y,u,v,w,x)=0$ gemäss den in No. 3 gemachten Angaben unter Bezugnahme auf das in No. 6 Gesagte vollständig durchführen. Dabei ist noch gemäss No. 6 III. B die dort genannte Determinante D_η zu betrachten. Die Betrachtung ist dieselbe wie bei $\zeta=0$ die der Determinante D_ζ der hier aufgestellten Integrale von $G_m(y,u,v,w,\zeta)=0$

und ihrer $m-1$ ersten Ableitungen, welche Determinante auch bei der Werthberechnung nach No. 6 IV. vorkommt. Es ergiebt sich, wenn die Ausdrücke der normalen Integrale in die Determinante eingesetzt werden, dass dieselbe die Gestalt erhält

$$(3.) \qquad D_\zeta = e^V \zeta^W c e^{-\int_0^\zeta \mathfrak{P}(\zeta)\,d\zeta},$$

wo e^V das Product der determinirenden Factoren in den m Integralen, W abgesehen von einer ganzen Zahl die Summe der Exponenten in den zugehörigen regulären Theilen, $\mathfrak{P}(\zeta)$ von der Form $\sum_0^\infty c_\alpha \zeta^\alpha$ ist, der constante Factor c direct aus der Determinante bestimmt wird. Wenn der Coefficient von $\frac{d^{m-1}y}{d\zeta^{m-1}}$ in $G_m(y, u, v, w, \zeta) = 0$ durch p_1 bezeichnet wird, so ist

$$(4.) \qquad D_\zeta = e^{-\int p_1 d\zeta},$$

hierdurch ergiebt sich der Ausdruck von $\mathfrak{P}(\zeta)$ in (3.).

B) Die nichthomogene lineare Differentialgleichung $F_m(y, u, v, w, x) = q$ liege vor, wo für den Differentialausdruck F_m das in A) Gesagte gilt.

Dann sind wie in No. 7 die Integrale von $G_m(y, u, v, w, \zeta) = 0$ unter der Form

$$(5.) \qquad \mu_1, \quad \mu_1 \int \mu_1^{-1} \mu_2 d\zeta, \quad \ldots, \quad \mu_1 \int d\zeta \mu_1^{-1} \mu_2 \int \cdots \int \mu_{m-1}^{-1} \mu_m d\zeta$$

aufzustellen. Hier werden die μ normale Elementarintegrale. Der Ausdruck (5.) wird successive mittelst der in A) aufgestellten normalen Integrale von $G_m = 0$ gebildet, wodurch der Anfangsexponent des regulären Theiles in jedem μ bekannt wird, wie dieses in Abh. Bd. 95 S. 70, 71 bei Aufstellung von Systemen normaler Elementarintegrale auseinandergesetzt ist. Hierbei kommt in Betracht, dass die in A) aufgestellten normalen Integrale von $G_m = 0$ der verschiedenen Gruppen mit demselben determinirenden Factor e^w successive gleich werden den mit e^w multiplicirten Integralen (2.), wenn dieselben mit Constanten multiplicirt und bei den Integrationen Constanten zugefügt werden, sobald in diesen Integralen die Exponenten so geordnet sind, dass diejenigen, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, auf einander folgen, und in diesen der reelle Theil der vorhergehenden nicht kleiner als der der folgenden ist, gemäss Abh. Bd. 87 S. 242, 243. Die Darstellung der Grössen μ in (5.) geschieht alsdann mittelst der Differentialdeterminanten

(No. 7 (5.)) der normalen Integrale; die Differentialdeterminanten werden direct gebildet, in denselben sind die Glieder, welche Logarithmen enthalten, wegzulassen. Diese Darstellung der μ kommt dann auch bei der Werthberechnung zur Anwendung. Bei den Integrationen in (5.) zur Herstellung der Ausdrücke, die No. 7 (6.), (10.) entsprechen, wird das constante Glied annullirt. Die normalen Integrale von $G_m = 0$ werden durch homogene lineare Verbindungen mit constanten Coefficienten von Ausdrücken (5.), in denen bei den Integrationen das constante Glied annullirt ist, dargestellt. Diese constanten Coefficienten werden dadurch bestimmt, dass successive mit den μ dividirt, das constante Glied ermittelt, alsdann differentiirt wird (vgl. Abh. Bd. 95 S. 77, 78). Dieses Gleichungssystem lässt sich eindeutig umkehren, wodurch die Integrale (5.) vermittelst der normalen Integrale ausgedrückt werden, wie dieses bei dem Umgange um $\zeta = 0$ erforderlich ist (vgl. No. 7 II.). Nun tritt für die Differentialgleichung $F_m = q$ die in No. 4 und No. 7 auseinandergesetzte Behandlung ein, gemäss welcher die Integration sich bewerkstelligen lässt.

Zu verbessern in der Abhandlung des Verfassers Bd. 107: Seite 73 Zeile 13 von unten und Seite 74 Zeile 8 von oben ist $Pq_a^{(x)}$ statt $q_a^{(x)}$ zu setzen.

Ueber indefinite ternäre quadratische Formen.

(Fortsetzung der Arbeit Bd. 114 Heft III S. 233—254 dieses Journals.)

(Von Herrn *A. Meyer* in Zürich.)

---

§ 4.

Darstellung binärer Formen durch ternäre, insbesondere in dem in § 3 betrachteten Falle.

21. Zunächst betrachte ich die allgemeine Aufgabe:

Durch eine ternäre Form f der Invarianten Ω, Δ eine binäre Form φ der Determinante $\Omega M''$ darzustellen, jedoch unter der Voraussetzung, dass φ primitiv sei und M'' prim zu Δ; auch beschränke ich mich, *wie überall im Folgenden,* auf *eigentliche* Darstellungen. Dann folgt von selbst, dass auch f primitiv sein muss; aber auch umgekehrt: wenn f primitiv ist und M'' prim zu $\Omega\Delta$, muss auch φ primitiv sein*).

In der That: Lässt sich $\varphi = (m, n'', m')$ durch f eigentlich darstellen, so ist f einer Form $g = \begin{pmatrix} m, & m', & m'' \\ n, & n', & n'' \end{pmatrix}$ der Invarianten Ω, Δ äquivalent. Ist $G = \begin{pmatrix} M, & M', & M'' \\ N, & N', & N'' \end{pmatrix}$ die Adjungirte von g, so ist

$$N^2 - M'M'' = \Delta m, \quad NN' - M''N'' = -\Delta n'', \quad N''^2 - MM'' = \Delta m'.$$

Hätten nun m, n'', m' den Primfactor p gemein, so wäre $\Omega M'' = n''^2 - mm'$ durch p theilbar. Aus $\Omega \equiv 0 \pmod{p}$ und

$$n^2 - m'm'' = \Omega M, \quad n'^2 - m''m = \Omega M', \quad n'N' + nN + m''M'' = \Omega\Delta$$

würde folgen:

$$n \equiv n' \equiv m''M'' \equiv 0 \pmod{p},$$

was unmöglich ist, weil M'' prim zu Ω und f primitiv vorausgesetzt ist.

Aus $M'' \equiv 0 \pmod{p}$ würde folgen

$$N' \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{und} \quad \Omega\Delta = Mm + N''n'' + N'n' \equiv 0 \pmod{p},$$

---

*) Vgl. Disq. arithm. Art. 283.

was wiederum der Voraussetzung widerspricht. Folglich können m, n'', m' keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, w. z. b. w.

Um φ durch eine ternäre Form der Invarianten Ω, Δ eigentlich darzustellen, müssen N, N' durch die Congruenzen bestimmt werden:

$$(1.)\qquad N^2 \equiv \Delta m,\quad NN' \equiv -\Delta n'',\quad N'^2 \equiv \Delta m' \pmod{M''}.$$

Für die Lösbarkeit derselben ist nothwendig und hinreichend, dass für jeden ungeraden Primfactor μ'' von M'' sei

$$(\alpha.)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\varphi}{\mu''}\right) = \left(\frac{\Delta}{\mu''}\right); \\ \text{ausserdem } \varphi \equiv \Delta \pmod{4 \text{ oder } 8}, \text{ wenn } M'' \equiv 4 \text{ oder } 0 \pmod{8}. \end{cases}$$

Durch die Gleichungen

$$(2.)\qquad \begin{cases} M = \frac{N'^2-\Delta m'}{M''},\quad M' = \frac{N^2-\Delta m}{M''},\quad N'' = \frac{NN'+\Delta n''}{M''}, \\ n = -\frac{Nm'+N'n''}{M''},\quad n' = -\frac{Nn''+N'm}{M''},\quad m'' = \frac{n'^2-\Omega M'}{m} \end{cases}$$

sind dann die übrigen Coefficienten einer ternären Form

$$g = \begin{pmatrix} m, & m', & m'' \\ n, & n', & n'' \end{pmatrix} \text{ und ihrer adjungirten } G = \begin{pmatrix} M, & M', & M'' \\ N, & N', & N'' \end{pmatrix}$$

gegeben, welche φ darstellt. Die Coefficienten n, n', m'' werden ganzzahlig, weil auch noch die aus (2.) abzuleitenden Gleichungen gelten:

$$(2^*.)\qquad n = \frac{MN-N'N''}{\Delta},\quad n' = \frac{M'N'-NN''}{\Delta},\quad m'' = \frac{n^2-\Omega M}{m'} = \frac{nn'+\Omega N''}{n''}$$

und nach der Voraussetzung weder M'', Δ noch m, n'', m' einen gemeinschaftlichen Theiler haben. Ist $\Omega\Delta$ ungerade, so sind g und G eigentlich primitiv und Ω, Δ die Invarianten von g*).

Soll φ durch eine *gegebene* Form f der Invarianten Ω, Δ dargestellt werden, so hat man alle Formen g aufzustellen, welche den verschiedenen mod. M'' nicht äquivalenten**) Wurzelsystemen N, N' entsprechen, von diesen Formen diejenigen zu suchen, welche mit f äquivalent sind und sämmtliche Transformationen von f in g zu ermitteln. Damit aber f und g äquivalent sein können, müssen sie in dasselbe Geschlecht gehören, woraus sich ausser $(\alpha.)$ die Bedingungen ergeben:

$$(\beta.)\qquad \left(\frac{\varphi}{\omega}\right) = \left(\frac{f}{\omega}\right),\quad \left(\frac{M''}{\delta}\right) = \left(\frac{F}{\delta}\right)$$

---

*) *Smith,* Philos. Transactions, vol. 157, p. 271.

**) Zwei Systeme N, N' und N_1, N_1' sollen nicht äquivalent heissen, wenn weder zugleich $N_1 \equiv N$, $N_1' \equiv N'$ noch zugleich $N_1 \equiv -N$, $N_1' \equiv -N' \pmod{M''}$ ist. Vgl. Disq. ar. Art. 282.

in Bezug auf alle ungeraden Primfactoren ω von Ω, δ von Δ. Ist φ nicht negativ und Ω, Δ (wie hier immer) positiv und ungerade und enthält das Geschlecht von f nur *eine* Klasse, so sind die Bedingungen (α.) und (β.) für die Darstellbarkeit von φ durch f auch hinreichend.

22. Im Folgenden soll die Darstellung einer primitiven, nicht negativen Form $\varphi = (m, n'', m')$ der Determinante $\Omega\Theta M''$ durch eine ternäre Form f_1 der Invarianten $\Omega\Theta$, $\Delta\Theta$ untersucht werden unter den im vorigen Paragraphen gemachten Voraussetzungen über Ω, Δ, Θ und für den Fall, dass M'' prim ist zu $\Omega\Delta\Theta$. Ferner kann und soll φ so präparirt vorausgesetzt werden, dass m eine in $2\Omega\Delta\Theta M''$ nicht aufgehende Primzahl oder das doppelte einer solchen ist, je nachdem φ eigentlich oder uneigentlich primitiv ist.

Nach den Vorschriften des vorigen Artikels ist zunächst die Form

$$g = \begin{pmatrix} m, & m', & m'' \\ n, & n', & n'' \end{pmatrix} \quad \text{der Invarianten} \quad \Omega\Theta,\ \Delta\Theta$$

herzustellen, zu welchem Zwecke die Congruenzen

$$(3.)\qquad N^2 \equiv \Delta\Theta m, \quad NN' \equiv -\Delta\Theta n'', \quad N'^2 \equiv \Delta\Theta m' \ (\text{mod.} M'')$$

aufzulösen sind, was so geschehe, dass $N \equiv N' \equiv 0$ (mod. Θ) wird. Dann wird weiter

$$(4.)\qquad n \equiv n' \equiv M \equiv M' \equiv N'' \equiv 0 \ (\text{mod.}\Theta), \quad m'' \equiv 0 \ (\text{mod.}\Theta^2)$$

und

$$g_1 = \begin{pmatrix} m, & m', & (\Theta_1\Theta_2)^{-2}m'' \\ (\Theta_1\Theta_2)^{-1}n, & (\Theta_1\Theta_2)^{-1}n', & n'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1, & m_1', & m_1'' \\ n_1, & n_1', & n_1'' \end{pmatrix}$$

eine primitive Form der Invarianten $\Omega\Theta_2^2$, $\Delta\Theta_1$ mit der adjungirten

$$G_1 = \begin{pmatrix} \Theta^{-1}M, & \Theta^{-1}M', & \Theta_1 M'' \\ \Theta_2^{-1}N, & \Theta_2^{-1}N', & \Theta^{-1}N'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1, & M_1', & M_1'' \\ N_1, & N_1', & N_1'' \end{pmatrix},$$

wo M_1' prim ist zu Θ. Die Form g_1 geht durch die Substitution

$$x = y, \quad x' = y', \quad x'' = \Theta_1\Theta_2 y''$$

in g über und sie ist mit jeder Form $f = \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$ der Invarianten $\Omega\Theta_2^2$, $\Delta\Theta_1$ äquivalent, die mit ihr in dasselbe Geschlecht gehört. Die Form f soll wieder so gewählt sein, dass ihre Coefficienten den Bedingungen (1.) des Art. 8 genügen. Gehen nun g_1 in f und f in g_1 bezw. über durch die

(inversen) Substitutionen der Determinante 1:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{pmatrix}, \quad \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \Xi & \Xi' & \Xi'' \\ H & H' & H'' \\ Z & Z' & Z'' \end{pmatrix},$$

so geht f in g über durch die Substitution

$$\begin{pmatrix} \Xi & \Xi' & \Theta_1\Theta_2\Xi'' \\ H & H' & \Theta_1\Theta_2 H'' \\ Z & Z' & \Theta_1\Theta_2 Z'' \end{pmatrix}$$

der Determinante $\Theta_1\Theta_2$ und g muss einer der Formen f_{ik} äquivalent sein, welche mit ihr in dasselbe Geschlecht G gehören. Um zu entscheiden, mit welcher, ist diese Substitution in eine eingerichtete

$$T = \begin{pmatrix} \Theta_{11} & 0 & 0 \\ \Theta_{11}\alpha' & \Theta_{12}\Theta_{21} & 0 \\ \Theta_{11}\alpha'' & \Theta_{12}\Theta_{21}\beta'' & \Theta_{22} \end{pmatrix}$$

und eine nachfolgende der Determinante 1 zu zerlegen nach den Vorschriften des Art. 8. Hier ist Θ_{11} der grösste gemeinschaftliche Theiler von Ξ, Ξ', Θ_1 und Θ_{21} derjenige von $\Xi H' - H\Xi'$, Θ_2, d. h. von ζ'' und Θ_2; ferner $\Theta_1 = \Theta_{11}\Theta_{12}$, $\Theta_2 = \Theta_{21}\Theta_{22}$, und α', β'' sind durch die Congruenzen bestimmt

$$(5.) \qquad \Xi\alpha' \equiv H \pmod{\Theta_{12}}, \quad \zeta''\beta'' \equiv -\eta'' \pmod{\Theta_{22}}$$

und zwar eindeutig nach den betreffenden Moduln; denn aus der Congruenz $M_1\Xi^2 + M_1'\Xi'^2 + 2N_1''\Xi\Xi' \equiv 0 \pmod{\Theta_{12}}$ folgt, dass Ξ prim ist zu Θ_{12} und Θ_{11} der g. g. Th. von Ξ und Θ_1; ebenso ist ζ'' prim zu Θ_{22}. Bedeuten nun α, β, γ, δ für T dasselbe, was α_1, β_1, γ_1, δ_1 (nach Art. 13, (α.) und (β.)) für T_1, so erhält man nach Art. 16:

$$2\chi(\alpha,\ \alpha_1) \equiv 1 + \frac{a'\alpha_1}{\sqrt{a'(a\gamma_1^2 + a'\alpha_1^2)}} \pmod{\Gamma_{11}},$$

$$2\chi(\alpha,\ \alpha_1) \equiv 1 + \frac{a\gamma_1\Xi + a'\alpha_1 H}{\sqrt{m(a\gamma_1^2 + a'\alpha_1^2)}} \pmod{\Gamma_{12}},$$

$$2\chi(\beta,\ \beta_1) \equiv 1 + \frac{a_0''\beta_1}{\sqrt{a_0''(a_0'\delta_1^2 + a_0''\beta_1^2)}} \pmod{\Gamma_{21}},$$

$$2\chi(\beta,\ \beta_1) \equiv 1 + \frac{a_0'\delta_1\zeta'' - a_0''\beta_1\eta''}{\sqrt{(a_0'\zeta''^2 + a_0''\eta''^2)(a_0'\delta_1^2 + a_0''\beta_1^2)}} \pmod{\Gamma_{22}},$$

wo $\Gamma_{11}\Gamma_{12} = \Gamma_1$, $\Gamma_{21}\Gamma_{22} = \Gamma_2$ und Γ_{ik} Theiler von Θ_{ik} ist, $a' = \Theta_2^2 a_0'$, $a'' = \Theta_2^2 a_0''$;

also $aa_0'' \equiv -\Omega A'$, $aa_0' \equiv -\Omega A''$, $A'\eta'''^2 + A''\zeta'''^2 \equiv M_1''$ (mod. Θ_2); daher auch

$$2\chi(\beta, \beta_1) \equiv 1 - \frac{A'\beta_1}{\sqrt{A'(A''\delta_1^2 + A'\beta_1^2)}} \pmod{\Gamma_{21}},$$

$$2\chi(\beta, \beta_1) \equiv 1 - \frac{A''\delta_1\zeta'' - A'\beta_1\eta''}{\sqrt{M_1''(A''\delta_1^2 + A'\beta_1^2)}} \pmod{\Gamma_{22}}.$$

Aus den Gleichungen für die Transformation von f in g_1 folgt aber

$$(6.)\begin{cases} m_1 \equiv a\Xi^2 + a'H^2, & m_1' \equiv a\Xi''^2 + a'H''^2, \quad m_1'' \equiv a\Xi'''^2 + a'H'''^2, \\ n_1 \equiv a\Xi'\Xi'' + a'H'H'', & n_1' \equiv a\Xi''\Xi + a'H''H, \quad n_1'' \equiv a\Xi\Xi' + a'HH', \end{cases} \pmod{\Theta_1}$$

und hieraus

$$m_1\xi + n_1''\xi' + n_1'\xi'' \equiv a\Xi, \quad m_1\eta + n_1''\eta' + n_1'\eta'' \equiv a'H,$$

$$2\chi(\alpha, \alpha_1) \equiv 1 + \frac{\gamma_1(m_1\xi + n_1''\xi' + n_1'\xi'') + \alpha_1(m_1\eta + n_1''\eta' + n_1'\eta'')}{\sqrt{m(a\gamma_1^2 + a'\alpha_1^2)}} \pmod{\Gamma_{12}}.$$

Da weder f in Bezug auf Θ_1 noch F in Bezug auf Θ_2 einen bestimmten quadratischen Charakter besitzt, kann man a und A'' so gewählt voraussetzen, dass $\left(\frac{a}{\theta_1}\right) = \left(\frac{f_1}{\theta_1}\right)$, $\left(\frac{A''}{\theta_2}\right) = \left(\frac{\Theta_1 F_1}{\theta_2}\right)$ wird für jeden Primfactor θ_1 von Θ_1, θ_2 von Θ_2. Alsdann kann man zur Vereinfachung für f_1 diejenige Form wählen, welche aus f durch die Substitution $x = y$, $x' = \Theta_1 y'$, $x'' = \Theta_2 y''$ entsteht, so dass $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\gamma_1 = \delta_1 = 1$ gesetzt werden kann und man hat, weil $\Xi \equiv 0$ (mod. Γ_{11}), $\zeta'' \equiv 0$ (mod. Γ_{21}):

$$(7.)\quad \begin{cases} 2\chi(\alpha, 0) \equiv 1 + \Xi\sqrt{\frac{a}{m}} \equiv 1 + \frac{m_1\xi + n_1''\xi' + n_1'\xi''}{\sqrt{am_1}} \pmod{\Gamma_1}, \\ 2\chi(\beta, 0) \equiv 1 - \zeta''\sqrt{\frac{A''}{M_1''}} \pmod{\Gamma_2}, \end{cases}$$

wo die Wurzeln so zu wählen sind, dass $\chi(\alpha, 0)$, $\chi(\beta, 0)$ bezw. prim werden zu Γ_1, Γ_2, im Uebrigen aber beliebig sind.

Setzt man noch

$$\chi \equiv \chi(\alpha, 0) \pmod{\Gamma_1}, \quad \chi \equiv \chi(\beta, 0) \pmod{\Gamma_2},$$

so sind die Formen g und f_{ik} (Art. 20) äquivalent oder nicht, je nachdem der Totalcharakter des Products $\chi\chi_{ik}$ zu $\mathfrak{G}$ gehört oder nicht; daher gilt der Satz:

$\mathfrak{D}$. *Damit es Darstellungen von φ durch f_{ik} gebe, welche zu den Congruenzwurzeln N, N' gehören, ist nothwendig und hinreichend, dass der Totalcharakter von $\chi\chi_{ik}$ zur Gruppe $\mathfrak{G}$ gehöre.*

23. Im Folgenden soll zur Abkürzung die Zahl $\varkappa$ durch die Congruenzen

$$(8.)\qquad \varkappa \equiv -\frac{m_1\xi+n''_1\xi'+n'_1\xi''}{\sqrt{am_1}} \pmod{\Gamma_1},\quad \varkappa \equiv \zeta''\sqrt{\frac{A''}{M''_1}} \pmod{\Gamma_2}$$

bestimmt werden, so dass

$$2\chi \equiv 1-\varkappa \pmod{\Gamma}$$

wird. Den Ausdruck

$$(9.)\qquad \mathfrak{D}(1,\varkappa) \equiv \tfrac{1}{2}(1-\varkappa) \pmod{\Gamma}$$

nenne ich *den zur Substitution Σ gehörigen Decidenten**) *von* g_1 (eigentlich den zur Substitution Σ und den Congruenzwurzeln N, N' gehörenden Decidenten der Darstellung von φ durch Formen f_{ik}), indem ich setze

$$(10.)\qquad 2\mathfrak{D}(\varkappa,\varkappa_1) \equiv 1-\varkappa\varkappa_1+\sqrt{(1-\varkappa^2)(1-\varkappa_1^2)} \pmod{\Gamma}$$

unter der Voraussetzung, dass $1-\varkappa^2$, $1-\varkappa_1^2$ quadratische Reste von Γ sind, wobei es gleichgültig ist, welcher Werth der Wurzel gemeint ist.

Von den Decidenten gelten folgende Sätze:

1) *Die Ausdrücke (welche conjugirt heissen mögen)*

$$1-\varkappa\varkappa_1+\sqrt{(1-\varkappa^2)(1-\varkappa_1^2)} \pmod{\Gamma},\quad 1+\varkappa\varkappa_1+\sqrt{(1-\varkappa^2)(1-\varkappa_1^2)} \pmod{\Gamma}$$

haben alle denselben quadratischen Charakter in Bezug auf die Primfactoren von Γ (Grundfactoren von G).

Denn ist θ ein solcher Primfactor, so ist

$$\left.\begin{array}{l}[1-\varkappa\varkappa_1+\sqrt{(1-\varkappa^2)(1-\varkappa_1^2)}][1-\varkappa\varkappa_1-\sqrt{(1-\varkappa^2)(1-\varkappa_1^2)}] \equiv (\varkappa-\varkappa_1)^2,\\ [1+\varkappa\varkappa_1+\sqrt{(1-\varkappa^2)(1-\varkappa_1^2)}][1-\varkappa\varkappa_1+\sqrt{(1-\varkappa^2)(1-\varkappa_1^2)}] \equiv (\sqrt{1-\varkappa^2}+\sqrt{1-\varkappa_1^2})^2\end{array}\right\} \pmod{\theta}.$$

2) *Das Product*

$$\mathfrak{D}(\varkappa_1,\varkappa_2)\,\mathfrak{D}(\varkappa_2,\varkappa_3)\,\mathfrak{D}(\varkappa_3,\varkappa_1)$$

ist quadratischer Rest von Γ.

Dies ergiebt sich als Specialfall der in Art. 18 bewiesenen Congruenz, wenn daselbst $\varkappa = 1$, $a = 1$, $a' = -1$, $\lambda_i = \varkappa_i$ gesetzt wird, weil

$$2(1-\varkappa\varkappa_1+\sqrt{(1-\varkappa^2)(1-\varkappa_1^2)}) \equiv (\sqrt{1-\varkappa^2}+\sqrt{1-\varkappa_1^2})^2+(\varkappa-\varkappa_1)^2$$

ist. Speciell ist für jeden Grundfactor θ ($\varkappa_3 = 1$):

$$\left(\frac{\mathfrak{D}(\varkappa_1,\varkappa_2)}{\theta}\right) = \left(\frac{1\pm\varkappa_1}{\theta}\right)\left(\frac{1\pm\varkappa_2}{\theta}\right).$$

---

*) Ein von *Gauss* in der Theorie der biquadratischen Reste (Werke II, S. 317) in anderem Sinne gebrauchter Ausdruck.

3) *Geht*

$$g_1 = \binom{m_1,\ m_1',\ m_1''}{n_1,\ n_1',\ n_1''},\quad (\text{wo } am_1 R \Gamma_1,\ A'' M_1'' R \Gamma_2)$$

durch die Substitution der Determinante $e = \pm 1$

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix},\ \textit{mit der inversen}\ S^{-1} = \begin{pmatrix} Ae & A'e & A''e \\ Be & B'e & B''e \\ \Gamma e & \Gamma' e & \Gamma'' e \end{pmatrix}$$

über in

$$g_2 = \binom{m_2,\ m_2',\ m_2''}{n_2,\ n_2',\ n_2''},\quad (\text{wo } am_2 R \Gamma_1,\ A'' M_2'' R \Gamma_2)$$

und geht g_1 *in* f *über durch die Substitution der Determinante* $e' = \pm 1$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{pmatrix},$$

so besteht zwischen dem zu Σ *gehörigen Decidenten* $\mathfrak{D}_1$ *von* g_1 *und dem zu* $S^{-1}\Sigma$ *gehörigen Decidenten* $\mathfrak{D}_2$ *von* g_2 *für jeden Grundfactor* θ *die Relation*

$$\left(\frac{\mathfrak{D}_2}{\theta}\right) = \left(\frac{2}{\theta}\right)\left(\frac{1 \pm \varkappa'}{\theta}\right)\left(\frac{\mathfrak{D}_1}{\theta}\right),$$

wo

$$\varkappa' \equiv -\frac{m_1\alpha + n_1''\alpha' + n_1'\alpha''}{\sqrt{m_1 m_2}}\ (\text{mod.}\,\Gamma_1),\quad \varkappa' \equiv \Gamma'' \sqrt{\frac{M_1''}{M_2''}}\ (\text{mod.}\,\Gamma_2)$$

ist.

Es ist hierbei vorausgesetzt, dass für die Coefficienten von g_1 (und g_2) die in Art. 22 gemachten Voraussetzungen gelten und dass ausserdem $n_1'' \equiv 0$ (mod. Θ_2) sei, was durch Transformation von φ immer zu erreichen ist (aus Gründen der Symmetrie folgt, dass man auch $\varkappa' \equiv \gamma'' \sqrt{\frac{M_2''}{M_1''}}$ (mod. Γ_2) setzen kann, wenn $n_2'' \equiv 0$ (mod. Θ_2) ist).

Bezeichnet nämlich

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \Xi e' & \Xi' e' & \Xi'' e' \\ He' & H'e' & H''e' \\ Ze' & Z'e' & Z''e' \end{pmatrix}$$

die zu Σ inverse Substitution, so geht f in g_2 über durch $\Sigma^{-1}S$ und daraus

ergiebt sich nach dem vorigen Artikel zunächst

$$2\mathfrak{D}_2 \equiv 1+e(\Xi\alpha+\Xi'\alpha'+\Xi''\alpha'')\sqrt{\frac{a}{m_2}} \pmod{\Gamma_1},$$

$$2\mathfrak{D}_2 \equiv 1+e'(\Gamma\zeta+\Gamma'\zeta'+\Gamma''\zeta'')\sqrt{\frac{A''}{M''_2}} \pmod{\Gamma_2}.$$

Nun ist in Bezug auf einen Primfactor θ_1 von Γ_1:

$$1-\varkappa^2 \equiv -\frac{\Omega\Theta_2^2}{am_1}(M''_1\xi'^2-2N_1\xi'\xi''+M'_1\xi''^2) \equiv -\frac{\Theta\Omega_2^2}{am_1}M'_1\xi''^2,$$

$$1-\varkappa'^2 \equiv -\frac{\Omega\Theta_2^2}{m_1m_2}(M''_1\alpha'^2-2N_1\alpha'\alpha''+M'_1\alpha''^2) \equiv -\frac{\Omega\Theta_2^2}{m_1m_2}M'_1\alpha''^2,$$

$$\sqrt{(1-\varkappa^2)(1-\varkappa'^2)} \equiv \frac{\Omega\Theta_2^2}{m_1\sqrt{am_2}}(M''_1\alpha'\xi'-N_1(\alpha'\xi''+\xi'\alpha'')+M'_1\alpha''\xi'') \equiv \frac{\Omega\Theta_2^2}{m_1\sqrt{am_2}}M'_1\alpha''\xi'',$$

$$\varkappa\varkappa' \equiv \frac{(m_1\xi+n''_1\xi'+n'_1\xi'')(m_1\alpha+n''_1\alpha'+n'_1\alpha'')}{m_1\sqrt{am_2}},$$

$$\varkappa\varkappa'-\sqrt{(1-\varkappa^2)(1-\varkappa'^2)} \equiv (\Xi\alpha+\Xi'\alpha'+\Xi''\alpha'')\sqrt{\frac{a}{m_2}};$$

somit

$$2\mathfrak{D}_2 \equiv 1+e(\varkappa\varkappa'-\sqrt{(1-\varkappa^2)(1-\varkappa'^2)}) \pmod{\theta_1}.$$

Ebenso ist in Bezug auf jeden Primfactor θ_2 von Γ_2, wie aus den Transformationen von F in G_1 und von G_1 in G_2 folgt:

$$1-\varkappa^2 \equiv \frac{A'\eta''^2}{M''_1}, \quad 1-\varkappa'^2 \equiv \frac{(M'_1\Gamma'+N''_1\Gamma)^2}{M'_1M''_2} \equiv \frac{M'_1\Gamma'^2}{M''_2};$$

denn ist, wie vorausgesetzt, $n''_1 \equiv 0 \pmod{\Theta_2}$, so ist auch $N''_1 \equiv 0 \pmod{\Theta_2}$, $M \equiv m' \equiv 0 \pmod{\Theta_2^2}$; daher

$$(1-\varkappa^2)(1-\varkappa'^2) \equiv \frac{A'M'_1}{M''_1M''_2}\Gamma'^2\eta''^2 \pmod{\theta_2}.$$

Nun giebt aber die Transformation von F in G_1 in Bezug auf den Modul Θ_2 die Congruenzen:

$$(1)\ A'\eta^2+A''\zeta^2 \equiv 0, \quad (2)\ A'\eta'^2+A''\zeta'^2 \equiv M'_1, \quad (3)\ A'\eta''^2+A''\zeta''^2 \equiv M''_1,$$

$$(4)\ A'\eta\eta'+A''\zeta\zeta' \equiv 0, \quad (5)\ A'\eta'\eta''+A''\zeta'\zeta'' \equiv 0$$

und somit erhält man aus den Verbindungen

$$(2)(3)-(5)^2, \quad (5)\zeta''-(3)\zeta'; \quad (2)(1)-(4)^2, \quad (4)\zeta'-(2)\zeta, \quad (2)\eta-(4)\eta'$$

bezw. die Congruenzen:

$$A'A''(\eta'\zeta''-\zeta'\eta'')^2 \equiv M'_1M''_1, \quad A'\eta''(\eta'\zeta''-\zeta'\eta'') \equiv -M''_1\zeta';$$

$$A'A''(\eta\zeta'-\zeta\eta')^2 \equiv 0, \quad A'\eta'(\eta\zeta'-\zeta\eta') \equiv -M'_1\zeta, \quad A''\zeta'(\eta\zeta'-\zeta\eta') \equiv M'_1\eta,$$

aus denen folgt

$$|\eta'\zeta''-\zeta'\eta''|_{\theta_2}=0, \quad A'M_1'\eta''^2 \equiv A''M_1''\zeta'^2; \quad \eta\zeta'-\zeta\eta' \equiv \eta \equiv \zeta \equiv 0 \ (\text{mod.}\,\theta_2).$$

Demnach ist

$$(1-\varkappa^2)(1-\varkappa'^2) \equiv \frac{A''}{M_2''}\Gamma''^2\zeta'^2,$$

$$\varkappa\varkappa'+\sqrt{(1-\varkappa^2)(1-\varkappa'^2)} \equiv (\Gamma'\zeta'+\Gamma''\zeta'')\sqrt{\frac{A''}{M_2''}},$$

$$2\mathfrak{D}_2 \equiv 1+e'(\varkappa\varkappa'+\sqrt{(1-\varkappa^2)(1-\varkappa'^2)}) \ (\text{mod.}\,\theta_2);$$

und daher

$$\left(\frac{\mathfrak{D}_2}{\theta}\right)=\left(\frac{\mathfrak{D}(\varkappa,\varkappa')}{\theta}\right)=\left(\frac{1\pm\varkappa}{\theta}\right)\left(\frac{1\pm\varkappa'}{\theta}\right)=\left(\frac{2}{\theta}\right)\left(\frac{1\pm\varkappa'}{\theta}\right)\left(\frac{\mathfrak{D}_1}{\theta}\right)$$

in Bezug auf jeden Primfactor θ von Γ.

Ist $\alpha=\pm 1$, $\alpha'=\alpha''=0$, so wird $\left(\frac{\mathfrak{D}_2}{\theta_1}\right)=\left(\frac{\mathfrak{D}_1}{\theta_1}\right)$. Auch ändert sich der Decident nicht, wenn man in der Substitution S bloss γ, γ', γ'' ändert.

24. Die Beziehung zwischen dem System der nichtäquivalenten Congruenzwurzeln N, N' und denjenigen Formen f_i, welche φ darstellen, soll jetzt noch genauer untersucht werden. Es mögen also in der in Art. 22 angegebenen Weise, unter denselben Voraussetzungen über φ und der weitern, dass auch $n''\equiv 0$ (mod. Θ_2) sei, zwei ternäre Formen g_1 und g_2 der Invarianten $\Omega\Theta_2^2$, $\varDelta\Theta_1$ hergestellt werden, welche die Form φ als Bestandtheil enthalten, aber nichtäquivalenten Wurzelsystemen N, N' entspringen. Diese Formen gehören demselben Geschlechte theilerfremder Invarianten an, sind also äquivalent, und eine Transformation von g_1 in g_2 kann nach der Vorschrift gefunden werden, die ich in einer früheren Abhandlung*) gegeben habe. Dabei soll stets

$$g_k=\begin{pmatrix} m_k, & m_k', & m_k'' \\ n_k, & n_k', & n_k'' \end{pmatrix}, \quad \text{die adjungirte} \quad G_k=\begin{pmatrix} M_k, & M_k', & M_k'' \\ N_k, & N_k', & N_k'' \end{pmatrix}$$

gesetzt werden, so dass also

$$m_1=m_2=m, \quad m_1'=m_2'=m'\equiv 0 \ (\text{mod.}\,\Theta_2^2), \quad n_1''=n_2''=n''\equiv 0 \ (\text{mod.}\,\Theta_2),$$

$$M_1''=M_2''=M''\Theta_1, \quad M_1'\equiv M_2' \ (\text{mod.}\,\Theta), \quad M_1' \text{ prim zu } \Theta,$$

$$m_1''\equiv n_1\equiv M_1\equiv 0 \ (\text{mod.}\,\Theta_2^2), \ N_1''\equiv n_1'\equiv 0 \ (\text{mod.}\,\Theta_2), \ N_1\equiv N_1'\equiv 0 \ (\text{mod.}\,\Theta_1\Theta_2)$$

ist; ebenso für die Coefficienten von g_2 und G_2.

Den bereits früher gemachten Voraussetzungen über m und M'' füge

---

*) Dieses Journal, Bd. 108, S. 139.

ich noch die weitere hinzu, dass M'' nicht durch 4 theilbar sei. Ist dann M'' gerade, so ist φ eigentlich primitiv und hat keinen bestimmten Charakter mod. 4; man kann daher die Determinante $\Delta\Theta_1 m$ der Formen (M'_1, N_1, M''_1), (M'_2, N_2, M''_2) congruent 3 (mod. 4) voraussetzen. Dann (sowie auch für ungerades M'') sind beide eigentlich primitiv, da M'' prim ist zu $\Delta\Theta_1 m$, und nicht negativ, weil sie durch indefinite ternäre Formen positiver Determinante darstellbar sind, und gehören demselben Geschlechte an. Daher lassen sich zwei ihnen bezw. äquivalente Formen

$$(M'_3, N_3, M''_3) \quad \text{und} \quad (M'_4, N_4, M''_4)$$

finden, in welchen $M''_3 = M''_4$ das Product zweier in $2\Omega\Delta\Theta m$ nicht aufgehenden Primzahlen P, P_1 ist, $N_4 \equiv N_3 \pmod{P}$, $N_4 \equiv -N_3 \pmod{P_1}$. Bezeichnen nämlich Φ_1 und Φ_2 die Klassen von (M'_1, N_1, M''_1) und (M'_2, N_2, M''_2), so bestimme man zwei eigentlich primitive Klassen Ψ und Ψ_1 derselben Determinante, so dass

$$\Phi_1 = \Psi\Psi_1, \quad \Phi_2 = \Psi\Psi_1^{-1}; \quad \text{also} \quad \Psi^2 = \Phi_1\Phi_2, \quad \Psi_1 = \Phi_1\Psi^{-1}.$$

Da $\Phi_1\Phi_2$ dem Hauptgeschlechte angehört, lässt sich Ψ und hierauf Ψ_1 immer dieser Bedingung gemäss bestimmen. Sind nun P, P_1 zwei positive in $2\Omega\Delta\Theta m$ nicht aufgehende Primzahlen, welche bezw. durch Ψ, Ψ_1 darstellbar sind, und (P, Q, R), (P_1, Q_1, R_1) Formen dieser Klassen, so braucht man nur

$$N_3 \equiv N_4 \equiv Q \pmod{P}, \quad N_3 \equiv -N_4 \equiv Q_1 \pmod{P_1}$$

zu machen, um Formen $\left(\frac{N_3^2 - \Delta\Theta_1 m}{PP_1}, N_3, PP_1\right)$, $\left(\frac{N_4^2 - \Delta\Theta_1 m}{PP_1}, N_4, PP_1\right)$ der Klassen Φ_1, Φ_2 zu erhalten, welche der gestellten Forderung genügen.

Ausserdem müssen aber P, P_1 so gewählt sein, dass für die Fundamentalauflösung T, U der Gleichung

$$t^2 - PP_1\Omega\Theta_2^2 u^2 = 1$$

$T \equiv e \pmod{P}$, $T \equiv -e \pmod{P_1}$ wird, wo $e = \pm 1$ ist. Auch dieser Bedingung kann, wie a. a. O. bewiesen ist, stets genügt werden.

Da M''_3 prim ist zu $\Delta\Theta m$, kann und soll zur Vereinfachung der weiteren Entwickelungen noch

$$N_3 \equiv N_4 \equiv 0 \pmod{\Delta\Theta m}$$

vorausgesetzt werden.

25. Geht (M'_1, N_1, M''_1) über in (M'_3, N_3, M''_3) durch die Substitution

$$(\rho.) \qquad \begin{pmatrix} \rho' & \sigma' \\ \rho'' & \sigma'' \end{pmatrix}$$

der Determinante 1, so sei

$$G_1\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \varrho' & \sigma'\\ 0 & \varrho'' & \sigma''\end{pmatrix} = G_3;\quad \text{also}\quad g_1\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma'' & -\varrho''\\ 0 & -\sigma' & \varrho'\end{pmatrix} = g_3$$

und

$$G_3\begin{pmatrix}T-n_3''U & m_3U & 0\\ -m_3'U & T+n_3''U & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = G_5;\quad \text{also}\quad g_3\begin{pmatrix}T+n_3''U & m_3'U & 0\\ -m_3U & T-n_3''U & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = g_5.$$

Dann ist

$$M_5'' = M_3'' = M_4'' = PP_1;\quad m_5 = m_3 = m,$$

$$N_5 = N_3T - n_3'M_3''U \equiv N_3T \equiv eN_4 \pmod{PP_1};$$

daher (M_5', N_5, M_5'') mit (M_4', N_4, M_4''), also auch mit (M_2', N_2, M_2'') eigentlich oder uneigentlich äquivalent, je nachdem $e = +1$ oder -1 ist, und entstehe aus letzterer Form durch die Substitution

$$\begin{pmatrix}\varrho_1' & \sigma_1'\\ \varrho_1'' & \sigma_1''\end{pmatrix}$$

der Determinante e.

Ist dann

$$G_2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \varrho_1' & \sigma_1'\\ 0 & \varrho_1'' & \sigma_1''\end{pmatrix} = G_6;\quad \text{also}\quad g_2\begin{pmatrix}e & 0 & 0\\ 0 & \sigma_1'' & -\varrho_1''\\ 0 & -\sigma_1' & \varrho_1'\end{pmatrix} = g_6,$$

so wird

$$M_6' = M_5',\quad M_6'' = M_5'',\quad N_6 = N_5;\quad m_6 = m_2 = m = m_5;$$

daher

$$n_6'^2 \equiv n_5'^2,\quad n_6''^2 \equiv n_5''^2,\quad n_6'n_6'' \equiv n_5'n_5'' \pmod{m},$$

und da m eine ungerade Primzahl oder das Doppelte einer solchen ist:

$$n_6' \equiv e'n_5',\quad n_6'' \equiv e'n_5'' \pmod{m},\quad e' = \pm 1.$$

Es sei

$$n_6' = e'n_5' + m\nu',\quad n_6'' = e'n_5'' + m\nu''$$

und

$$g_6\begin{pmatrix}e' & -\nu'' & -\nu'\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = g_7;\quad \text{also}\quad G_6\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \nu'' & e' & 0\\ \nu' & 0 & e'\end{pmatrix} = G_7,$$

so wird

$$m_7 = m_5, \quad n_7' = n_5', \quad n_7'' = n_5''; \quad M_7' = M_5', \quad M_7'' = M_5'', \quad N_7 = N_5;$$

also

$$M_5' N_7' - N_5 N_7'' = M_5' N_5' - N_5 N_5'', \quad M_5'' N_7'' - N_5 N_7' = M_5'' N_5'' - N_5 N_5'$$

und hieraus

$$N_7' = N_5', \quad N_7'' = N_5''; \quad \text{also auch} \quad M_7 = M_5;$$

d. h. die Formen G_7 und G_5, folglich g_7 und g_5 sind identisch und g_2 geht in g_1 über durch die zusammengesetzte Substitution

$$\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1'' & -\varrho_1'' \\ 0 & -\sigma_1' & \varrho_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e' & -\nu'' & -\nu' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T - n_3''U & -m_3'U & 0 \\ m_3 U & T + n_3''U & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho' & \varrho'' \\ 0 & \sigma' & \sigma'' \end{pmatrix}.$$

Von den Substitutionen dieser Zusammensetzung kann nur die dritte, welche g_5 in g_3 überführt, den Charakter des Decidenten in Bezug auf die Primfactoren von Γ_1 ändern, und zwar ist nach Art. 23, 3):

$$\left(\frac{\mathfrak{D}_5}{\theta_1}\right) = \left(\frac{2}{\theta_1}\right)\left(\frac{1 \pm \varkappa'}{\theta_1}\right)\left(\frac{\mathfrak{D}_3}{\theta_1}\right), \quad -\varkappa' \equiv \frac{m_3(T + n_3''U) + n_3''(-m_3 U)}{\sqrt{m_3 m_5}} \equiv \pm T \pmod{\theta_1};$$

daher

$$\left(\frac{\mathfrak{D}_2}{\theta_1}\right) = \left(\frac{2}{\theta_1}\right)\left(\frac{1 \pm T}{\theta_1}\right)\left(\frac{\mathfrak{D}_1}{\theta_1}\right).$$

Aus der Gleichung $(T-e)(T+e) = PP_1 \Omega_1 \Omega_2^2 \Theta_2^2 U^2$ folgt aber

$$(\text{T.}) \begin{cases} T - e = \sigma P \Omega_1' \Theta_2'^2 v^2, \quad T + e = \sigma P_1 \Omega_1'' \Theta_2''^2 w^2, \\ (\Omega_1' \Omega_1'' = \Omega_1, \quad \Theta_2' \Theta_2'' = \Theta_2, \quad \sigma = 1 \text{ od. } 2, \quad \Omega_2 U = \sigma v w), \end{cases}$$

$$\left(\frac{1 - eT}{\theta_1}\right) = \left(\frac{-e\sigma \Omega_1' P}{\theta_1}\right), \quad \left(\frac{1 + eT}{\theta_1}\right) = \left(\frac{e\sigma \Omega_1'' P_1}{\theta_1}\right).$$

Ferner ist der letzte Coefficient der obigen Transformation von g_2 in g_1:

$$\Gamma'' = -\sigma_1' \varrho''(T + n_3''U) + \sigma'' \varrho_1';$$

daher

$$\varkappa' \equiv (-\sigma_1' \varrho''(T + n_3''U) + \sigma'' \varrho_1') \sqrt{\frac{M_1''}{M_2''}} \pmod{\Gamma_2}$$

oder, weil

$$n_3'' = -n_1' \sigma' + n_1'' \sigma'' \equiv 0, \quad T \equiv e'' \equiv \pm 1 \pmod{\theta_2}, \quad M_1'' = M_2'' = M'' \Theta_1$$

ist:

$$\pm \varkappa' \equiv e'' \sigma'' \varrho_1' - \varrho'' \sigma_1' \pmod{\theta_2}$$

für jeden Primfactor θ_2 von Γ_2. Da aber $N_1 \equiv N_3 \equiv 0 \pmod{\Theta_2}$ ist, so liefert die Transformation (ϱ.) die Congruenzen

$$M_1'\varrho'^2 + M_1''\varrho''^2 \equiv M_3', \quad M_1'\varrho'\sigma' + M_1''\varrho''\sigma'' \equiv 0, \quad (M_1'M_1'' \equiv M_3'M_3''),$$

aus denen folgt

$$M_1''\varrho'' \equiv -M_3'\sigma', \quad M_1''\sigma'' \equiv M_3''\varrho' \pmod{\Theta_2};$$

daher

$$\pm\varkappa' \equiv \frac{1}{M_1''}(e''M_3''\varrho'\varrho_1' + M_3'\sigma'\sigma_1') \pmod{\theta_2}.$$

26. Es bleibt übrig für die Substitutionscoefficienten ϱ', σ', ϱ_1', σ_1' geeignete Ausdrücke zu finden.

Bezeichnet man durch (a, b) die Form (a, b, c) und zugleich ihre Klasse, so gelten für die schon oben betrachteten Formen der Determinante $\varDelta\Theta_1 m$ die Compositionen

$$(P, N_3)(P_1, N_3) = (M''\Theta_1, N_1); \quad (P, N_3)(P_1, -N_3) = (M''\Theta_1, N_2),$$

wo

$$N_1^2 \equiv N_2^2 \equiv \varDelta\Theta_1 m \pmod{M''}, \quad N_1 \equiv N_2 \equiv 0 \pmod{\Theta_1\Theta_2}$$

ist. Es kann und soll aber zur Vereinfachung noch vorausgesetzt werden, es sei auch

$$N_1 \equiv N_2 \equiv 0 \pmod{\varDelta m}.$$

Dann wird zufolge der Gleichung $N_1^2 - M_1'M''\Theta_1 = \varDelta\Theta_1 m$ auch M_1', ebenso M_2' durch $\varDelta m$ theilbar. Da nun

$$(N_2 - N_1)(N_2 + N_1) \equiv 0 \pmod{M''}$$

ist, aber $N_1 N_2$ prim zu M'', weil $\varDelta\Theta_1 m$ es ist, und da M'' nicht durch 4 theilbar ist, so zerfällt M'' in zwei theilerfremde Factoren $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, welche bezw. in $N_2 - N_1$ und $N_2 + N_1$ aufgehen, so dass $N_2 \equiv N_1 \pmod{\mathfrak{M}_1}$, $\equiv -N_1 \pmod{\mathfrak{M}_2}$ ist und

$$(P, N_3)(P_1, N_3) = (\mathfrak{M}_1, N_1)(\Theta_1\mathfrak{M}_2, N_1); \quad (P, N_3)(P_1, -N_3) = (\mathfrak{M}_1, N_1)(\Theta_1\mathfrak{M}_2, -N_1);$$

daher

$$(P, N_3) = (\mathfrak{M}_1, N_1)\mathfrak{A}; \quad (P_1, N_3) = (\Theta_1\mathfrak{M}_2, N_1)\mathfrak{A}.$$

$\mathfrak{A}$ bedeutet hier eine nicht negative primitive ambige Klasse der Determinante $\varDelta\Theta_1 m$, lässt sich also durch eine Form repräsentiren, die aus

$$\left(\sigma, \ \sigma-1, \ \frac{(\sigma-1)^2 - \varDelta\Theta_1 m}{\sigma}\right) \quad \text{und} \quad (\varDelta'\Theta_1' m', \ 0, \ \varDelta''\Theta_1'' m'')$$

zusammengesetzt werden kann, wo $\sigma = 1$ oder 2 ist (letzteres kann nur

eintreten, wenn $\Delta\Theta_1 m \equiv 3 \pmod{4}$ ist), $\Delta' = \Delta'_1\Delta''^2_2$, $\Delta'' = \Delta''_1\Delta'''^2_2$, $\Delta'_1\Delta''_1 = \Delta_1$, $\Delta'_2\Delta''_2 = \Delta_2$, $\Theta'_1\Theta''_1 = \Theta_1$, $m'm'' = -m$. Es wird also

$$(P,\ N_3) = (\sigma_1\Delta'\Theta'_1\mathfrak{M}_1 m',\ \mathfrak{N}_1);\quad (P_1,\ N_3) = (\sigma_2\Delta'\Theta''_1\mathfrak{M}_2 m',\ \mathfrak{N}_1),$$

wo $\sigma_1\,(\sigma_2) = \frac{1}{\sigma}$ oder $= \sigma$ ist, je nachdem $\mathfrak{M}_1$ ($\mathfrak{M}_2$) gerade oder ungerade ist, und $\mathfrak{N}_1 \equiv N_1 \pmod{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2}$, $\equiv \sigma-1 \pmod{\sigma}$, $\equiv 0 \pmod{\Delta'\Theta_1 m'}$ sein muss, aber sofort $\equiv 0 \pmod{\Delta\Theta_1\Theta_2 m}$ gemacht werden soll.

Demgemäss lassen sich für die *Formen* die Transformationen bilden:

$$(\mathfrak{M}.)\qquad \begin{cases} (P,\ N_3)\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix} = (\sigma_1\Delta'\Theta'_1\mathfrak{M}_1 m',\ \mathfrak{N}_1),\\ (P_1,\ N_3)\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{pmatrix} = (\sigma_2\Delta'\Theta''_1\mathfrak{M}_2 m',\ \mathfrak{N}_1),\\ (PP_1,\ N_3)\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = (\Theta_1 M'',\ \mathfrak{N}_1),\end{cases}$$

wo nach den Vorschriften der Disq. ar. Art. 237, 239, 242 gesetzt werden kann:

$$\sigma_0\Delta' m'\alpha = \alpha_1\alpha_2 - M'_3\gamma_1\gamma_2,\quad \sigma_0\Delta' m'\gamma = P\alpha_1\gamma_2 + P_1\gamma_1\alpha_2 + 2N_3\gamma_1\gamma_2$$

($\sigma_1\sigma_2 = \sigma_0 = 1$ oder $\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, je nachdem M'' gerade oder ungerade; $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_0^2$).

Da $\mathfrak{N}_1 \equiv N_1 \pmod{M''\Theta_1}$, $\mathfrak{N}_1 \equiv N_1 \equiv N_3 \equiv 0 \pmod{\Theta_2}$ ist und

$$(M''_3,\ N_3,\ M'_3)\begin{pmatrix}\varrho' & -\varrho''\\ -\sigma' & \sigma''\end{pmatrix} = (M''\Theta_1,\ N_1,\ M'_1)$$

werden soll, kann gesetzt werden:

$$\sigma'_0\Delta' m'\varrho' \equiv \alpha_1\alpha_2 - M'_3\gamma_1\gamma_2,\quad -\sigma_0\Delta' m'\sigma' \equiv P\alpha_1\gamma_2 + P_1\gamma_1\alpha_2 \pmod{\Theta_2}.$$

Zweitens sind noch die Coefficienten ϱ'_1, σ'_1 einer Transformation

$$(M''_5,\ N_5,\ M'_5)\begin{pmatrix}e\varrho'_1 & -e\varrho''_1\\ -e\sigma'_1 & e\sigma''_1\end{pmatrix} = (M''\Theta_1,\ N_2,\ M'_2);\quad (M''_5 = PP_1,\ \varrho'_1\sigma''_1 - \sigma'_1\varrho''_1 = e)$$

zu bestimmen.

Da $N_5 \equiv N_3 T \pmod{PP_1}$ ist, setze ich $N_3 T - N_5 = PP_1\beta_5$ und erhalte

$$(M''_5,\ N_5)\begin{pmatrix}1 & \beta_5\\ 0 & 1\end{pmatrix} = (PP_1,\ N_3 T);$$

ferner

$$(P,\ N_3 T)\begin{pmatrix}1 & -\frac{T-e}{P}N_3\\ 0 & 1\end{pmatrix} = (P,\ eN_3);\quad (P_1,\ N_3 T)\begin{pmatrix}1 & -\frac{T+e}{P_1}N_3\\ 0 & 1\end{pmatrix} = (P_1,\ -eN_3)$$

und

$$(P,\ eN_3)\begin{pmatrix}\alpha_1 & e\beta_1\\ e\gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix} = (\sigma_1\varDelta'\Theta_1'\mathfrak{M}_1m',\ e\mathfrak{N}_1),$$

$$(P_1,\ -eN_3)\begin{pmatrix}\alpha_2 & -e\beta_2\\ -e\gamma_2 & \delta_2\end{pmatrix} = (\sigma_2\varDelta'\Theta_1''\mathfrak{M}_2m',\ -e\mathfrak{N}_1).$$

Aus

$\mathfrak{N}_1 \equiv N_2 \equiv 0\,(\text{mod.}\,\varDelta\Theta_1 m)$, $\mathfrak{N}_1 \equiv N_1 \equiv N_2\,(\text{mod.}\,\mathfrak{M}_1)$, $\mathfrak{N}_1 \equiv N_1 \equiv -N_2\,(\text{mod.}\,\mathfrak{M}_2)$
folgt

$$\mathfrak{N}_1 - N_2 \equiv 0\ \ (\text{mod.}\,\sigma_1\varDelta'\Theta_1'\mathfrak{M}_1m'),\quad \mathfrak{N}_1 + N_2 \equiv 0\ \ (\text{mod.}\,\sigma_2\varDelta'\Theta_1''\mathfrak{M}_2m')$$

und man kann daher setzen

$$N_2 - \mathfrak{N}_1 = \sigma_1\varDelta'\Theta_1'\mathfrak{M}_1m'\beta_1',\quad N_2 + \mathfrak{N}_1 = \sigma_2\varDelta'\Theta_1''\mathfrak{M}_2m'\beta_2'$$

und erhält für die Coefficienten γ_3 und γ_4 der Substitutionen

$$\begin{pmatrix}\alpha_3 & \beta_3\\ \gamma_3 & \delta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -\frac{T-e}{P}N_3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 & e\beta_1\\ e\gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \beta_1'\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_4 & \beta_4\\ \gamma_4 & \delta_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -\frac{T+e}{P_1}N_3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2 & -e\beta_2\\ -e\gamma_2 & \delta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \beta_2'\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

welche (P, N_3T) und $(P_1,\ N_3T)$ bzw. in $(\sigma_1\varDelta'\Theta_1'\mathfrak{M}_1m', eN_2)$ und $(\sigma_2\varDelta'\Theta_1''\mathfrak{M}_2m', eN_2)$ überführen:

$$\gamma_3 = e\gamma_1,\quad \gamma_4 = -e\gamma_2.$$

Aus diesen Substitutionen erhält man aber für die Coefficienten α', γ' einer Transformation

$$(PP_1,\ N_3T)\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix} = (M''\Theta_1,\ eN_2)$$

die Gleichungen

$$\sigma_0\varDelta'm'\alpha' = \alpha_3\alpha_4 - M_0'\gamma_3\gamma_4,\quad \sigma_0\varDelta'm'\gamma' = P\alpha_3\gamma_4 + P_1\gamma_3\alpha_4 + 2N_3T\gamma_3\gamma_4,$$

wo

$$PP_1M_0' = N_3^2T^2 - \varDelta\Theta_1 m$$

ist, und da

$$N_5 \equiv N_3 \equiv \beta_5 \equiv 0,\quad M_0' \equiv M_3',\quad \alpha_3 \equiv \alpha_1,\quad \alpha_4 \equiv \alpha_2\ \ (\text{mod.}\,\Theta_2)$$

ist, kann man schliesslich setzen:

$$\sigma_0\varDelta'm'\varrho_1' \equiv \alpha_1\alpha_2 + M_3'\gamma_1\gamma_2,\quad -\sigma_0\varDelta'm'\sigma_1' \equiv -eP\alpha_1\gamma_2 + eP_1\gamma_1\alpha_2\ \ (\text{mod.}\,\Theta_2).$$

27. Setzt man die gefundenen Werthe der Substitutionscoefficienten in die Formel für x' am Schlusse des Art. 25 ein, so kommt

$$\pm x' \equiv \frac{e''M_3''(\alpha_1^2\alpha_2^2 - M_3'^2\gamma_1^2\gamma_2^2) + eM_3'(P_1^2\gamma_1^2\alpha_2^2 - P^2\alpha_1^2\gamma_2^2)}{\sigma_0^2\varDelta'^2m'^2M_1''}\ \ (\text{mod.}\,\theta_2).$$

Aus den Transformationen ($\mathfrak{M}$) folgt aber, mod. Θ_2:

$$P\alpha_1^2+M_3'P_1\gamma_1^2 \equiv \sigma_1\Delta'\Theta_1'\mathfrak{M}_1 m', \quad P_1\alpha_2^2+M_3'P\gamma_2^2 \equiv \sigma_2\Delta'\Theta_1''\mathfrak{M}_2 m'$$

und hieraus

$$M_3''(\alpha_1^2\alpha_2^2-M_3'^2\gamma_1^2\gamma_2^2) \equiv -\sigma_0^2\Delta'^2m'^2M_1''+\Delta'm'(\sigma_1\Theta_1'\mathfrak{M}_1P_1\alpha_2^2+\sigma_2\Theta_1''\mathfrak{M}_2P\alpha_1^2),$$

$$M_3'(P_1^2\gamma_1^2\alpha_2^2-P^2\alpha_1^2\gamma_2^2) \equiv \Delta'm'(\sigma_1\Theta_1'\mathfrak{M}_1P_1\alpha_2^2-\sigma_2\Theta_1''\mathfrak{M}_2P\alpha_1^2),$$

$$1\pm e''\varkappa' \equiv \frac{2\sigma_1\Theta_1'\mathfrak{M}_1P_1\alpha_2^2}{\sigma_0^2\Delta'm'M_1''} \quad \text{oder} \quad \equiv \frac{2\sigma_2\Theta_1''\mathfrak{M}_2P\alpha_1^2}{\sigma_0^2\Delta'm'M_1''} \quad (\text{mod.}\,\theta_2),$$

je nachdem $ee''=+1$ oder $=-1$; und entsprechend ist

$$\left(\frac{1\pm e''\varkappa'}{\theta_2}\right)=\left(\frac{2\sigma_1\Delta_1'\Theta_1''\mathfrak{M}_2m'P_1}{\theta_2}\right) \quad \text{oder} \quad =\left(\frac{2\sigma_2\Delta_1'\Theta_1'\mathfrak{M}_1m'P}{\theta_2}\right).$$

Nach Art. 25 (T.) ist aber für die Primfactoren θ_2' und θ_2'' von Θ_2' und Θ_2'':

$$T\equiv e \;(\text{mod.}\,\theta_2'), \quad \left(\frac{\sigma P_1\Omega_1''}{\theta_2'}\right)=\left(\frac{T+e}{\theta_2'}\right)=\left(\frac{2e}{\theta_2'}\right),$$

$$T\equiv -e \;(\text{mod.}\,\theta_2''), \quad \left(\frac{\sigma P\Omega_1'}{\theta_2''}\right)=\left(\frac{T-e}{\theta_2''}\right)=\left(\frac{-2e}{\theta_2''}\right),$$

und da $T\equiv e''$ (mod. θ_2), $\sigma_1\sigma_2=\sigma_0^2$, $\left(\frac{M''}{\theta_2}\right)=\left(\frac{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2}{\theta_2}\right)=\left(\frac{-\Omega_1\Theta_1}{\theta_2}\right)$ (Art. 15 und 16), so folgt

$$\left(\frac{1\pm e''\varkappa'}{\theta_2}\right)=\left(\frac{-e\sigma\sigma_1\Omega_1'\Delta_1'\Theta_1'm'\mathfrak{M}_1}{\theta_2}\right)=\left(\frac{e\sigma\sigma_1\Omega_1''\Delta_1'\Theta_1''m'\mathfrak{M}_2}{\theta_2}\right)$$

für jeden Primfactor θ_2 von Γ_2.

Aus Art. 26 folgt aber auch

$$\left(\frac{P}{\theta_1}\right)=\left(\frac{\sigma_1\Delta_1'\Theta_1'm'\mathfrak{M}_1}{\theta_1}\right) \quad \text{oder} \quad \left(\frac{P_1}{\theta_1}\right)=\left(\frac{\sigma_1\Delta_1'\Theta_1''m'\mathfrak{M}_2}{\theta_1}\right),$$

je nachdem θ_1 in Θ_1'' oder in Θ_1' aufgeht; daher (Art. 25) entsprechend

$$\left(\frac{1\pm\varkappa'}{\theta_1}\right)=\left(\frac{-e\sigma\sigma_1\Omega_1'\Delta_1'\Theta_1'm'\mathfrak{M}_1}{\theta_1}\right) \quad \text{oder} \quad =\left(\frac{e\sigma\sigma_1\Omega_1''\Delta_1'\Theta_1''m'\mathfrak{M}_2}{\theta_1}\right)$$

oder auch, weil $\left(\frac{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2}{\theta_1}\right)=\left(\frac{M''}{\theta_1}\right)=\left(\frac{-\Omega_1\Theta_1\theta_1^{-1}}{\theta_1}\right)$ für jeden Grundfactor θ_1,

$$\left(\frac{1\pm\varkappa'}{\theta_1}\right)=\left(\frac{e\sigma\sigma_1\Omega_1''\Delta_1'\Theta_1''\theta_1^{-1}m'\mathfrak{M}_2}{\theta_1}\right) \quad \text{oder} \quad =\left(\frac{-e\sigma\sigma_1\Omega_1'\Delta_1'\Theta_1'\theta_1^{-1}m'\mathfrak{M}_1}{\theta_1}\right).$$

Da ausserdem $m=-m'm''$ und m' oder m'' gleich ± 1 oder ± 2 ist und für jeden Grundfactor θ_1 oder θ_2:

$$\left(\frac{m}{\theta_1}\right)=\left(\frac{-\Delta_1\Theta_1\theta_1^{-1}}{\theta_1}\right), \quad \left(\frac{m}{\theta_2}\right)=\left(\frac{-\Delta_1\Theta_1}{\theta_2}\right),$$

so kann man m' noch eliminiren und erhält so die Relationen:

$$\left(\frac{1\pm\varkappa'}{\theta_1}\right)=\left(\frac{d'\mathfrak{M}_1}{\theta_1}\right),\quad \left(\frac{1\pm\varkappa'}{\theta_2}\right)=\left(\frac{d\mathfrak{M}_1}{\theta_2}\right),$$

wo d einen positiven oder negativen Theiler von $2\Omega_1\Delta_1\Theta_1$ bedeutet und $d'=d\theta_1^{-1}$ oder $=d$ ist, je nachdem θ_1 in d aufgeht oder nicht, und daraus folgt endlich, (wenn man d durch $\frac{1}{2}d$ oder $2d$ ersetzt, je nachdem es gerade oder ungerade ist):

$$\left(\frac{\mathfrak{D}_2}{\theta}\right)=\left(\frac{d'\mathfrak{M}_1}{\theta}\right)\left(\frac{\mathfrak{D}_1}{\theta}\right)$$

für jeden Grundfactor θ. Mit Rücksicht auf die Bedeutung des Decidenten ergiebt sich somit der Satz:

$\mathfrak{E}$. *Gehören zwei Darstellungen von φ durch Formen f_i und f_j des Geschlechtes G, denen die charakteristischen Zahlen χ_i und χ_j entsprechen, bezw. zu den Congruenzwurzeln N_i, N_i' und N_j, N_j' und ist $\mathfrak{M}_{ij}$ der grösste gemeinschaftliche Theiler von N_i-N_j und M'', so gehört der Totalcharakter des Products $\chi_i\chi_j\mathfrak{M}_{ij}$ zur Gruppe $\mathfrak{G}$.*

Ist eine Darstellung von φ durch eine Form f_i von G bekannt, also (Disq. ar. Art. 282) auch das System der Congruenzwurzeln N_i, N_i', zu denen diese Darstellung gehört, so lassen sich nach diesem Satze mittelst der Tafel des Art. 20 die Formen von G angeben, welche die zu den anderen Congruenzwurzeln gehörenden Darstellungen liefern. Der Complex aller Klassen des Geschlechts G, welche φ darstellen, heisse *der zu φ gehörige Complex* und werde mit C_φ bezeichnet.

Heissen zwei Theiler einer Zahl conjugirt, wenn ihr Product dieser Zahl gleich ist, und heisst ein Theiler primitiv, wenn er zu seinem conjugirten relativ prim ist, so sind die oben betrachteten Zahlen $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ conjugirte Primitivtheiler von M'', und die Anzahl aller positiven ungeraden Primitivtheiler ist gleich der Anzahl der verschiedenen Congruenzwurzeln N (unter den gemachten Voraussetzungen). Die Totalcharaktere aller Primitivtheiler $\mathfrak{M}_1$ bilden eine Gruppe $\mathfrak{H}$. Ist $\mathfrak{H}'$ der grösste gemeinschaftliche Theiler von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ und sind $2^{\mathfrak{h}}$, $2^{\mathfrak{h}'}$ die Ordnungen von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$, so ist $2^{\mathfrak{h}-\mathfrak{h}'}$ die Anzahl der Klassen des Complexes C_φ.

Bezeichnet G_φ das Geschlecht von Formen der Determinante $\Omega\Theta M''$, zu welchem φ gehört, und ist φ' eine Form von G_φ, die mit φ nicht äquivalent ist, so haben die Complexe C_φ und $C_{\varphi'}$ entweder alle Klassen f_i gemein oder gar keine. Denn haben sie eine Klasse f_i gemein, so ist nach dem Vorigen jeder Complex durch f_i und $\mathfrak{H}$ in derselben Weise bestimmt.

28. Es bleibt nun noch übrig, die Beziehung der verschiedenen Complexe des Geschlechts G zu untersuchen, welche zu den Klassen von G_φ gehören.

Es seien φ_1 und φ_2 weder eigentlich noch uneigentlich äquivalente Formen von G_φ. Durch beide kann man dasselbe Product $m = \sigma pq$ darstellen, wo p, q zwei verschiedene positive in $2\Omega\varDelta\Theta M''$ nicht aufgehende Primzahlen bedeuten, $\sigma = 1$ oder 2 ist, je nachdem φ_1 und φ_2 eigentlich oder uneigentlich primitiv sind, und man kann diese Formen von vorneherein so transformirt voraussetzen, dass ihr erster Coefficient $= m$ wird, so dass

$$\varphi_1 = (m_1,\ n_1'',\ m_1'),\quad \varphi_2 = (m_2,\ n_2'',\ m_2'),$$

$m_1 = m_2 = m$, $n_2'' \equiv \pm n_1''$ (mod. p), $n_2'' \equiv \mp n_1''$ (mod. σq), $n_1'' n_2''$ prim zu m (weil sonst φ_1 und φ_2 eigentlich oder uneigentlich äquivalent wären); ausserdem kann und soll $n_1'' \equiv n_2'' \equiv 0$ (mod. $\Theta_1\Theta_2$) vorausgesetzt werden, wodurch auch $m_1' \equiv m_2' \equiv 0$ (mod. Θ) wird.

In der in Art. 22 angegebenen Weise stelle man jetzt die ternären Formen

$$g_1 = \begin{pmatrix} m_1, & m_1', & m_1'' \\ n_1, & n_1', & n_1'' \end{pmatrix},\quad g_2 = \begin{pmatrix} m_2, & m_2', & m_2'' \\ n_2, & n_2', & n_2'' \end{pmatrix}$$

der Invarianten $\Omega\Theta_2^2$, $\varDelta\Theta_1$ her, mit den adjungirten

$$G_1 = \begin{pmatrix} M_1, & M_1', & M_1'' \\ N_1, & N_1', & N_1'' \end{pmatrix},\quad G_2 = \begin{pmatrix} M_2, & M_2', & M_2'' \\ N_2, & N_2', & N_2'' \end{pmatrix},$$

wo $M_1'' = M_2'' = M''\Theta_1$ ist und für N_1 und N_2 dieselbe Wurzel der Congruenz $N^2 \equiv \varDelta\Theta_1 m$ (mod. $M''\Theta_1$) gewählt und ausserdem $N_1 = N_2 \equiv 0$ (mod. Θ_2) gemacht werden soll, so dass wieder

$$N_1 = N_2 \equiv 0 \ \ (\text{mod.}\, \Theta_1\Theta_2)$$

wird. Dann ist auch

$$M_2' = \frac{N_2^2 - \varDelta\Theta_1 m}{M_2''} = \frac{N_1^2 - \varDelta\Theta_1 m}{M_1''} = M_1'$$

prim zu Θ. Ferner kann und soll

$$N_1' \equiv N_2' \equiv 0 \ \ (\text{mod.}\, \Theta_1^2\Theta_2)$$

gewählt werden. Dann wird

$$n_1 \equiv n_1' \equiv n_2 \equiv n_2' \equiv N_1'' \equiv N_2'' \equiv 0 \ \ (\text{mod.}\, \Theta_1\Theta_2),$$

$$m_1'' \equiv 0 \ \ (\text{mod.}\, \Theta_2^2),\quad m_1'' \text{ prim zu } \Theta_1.$$

Die Formen (M_1', N_1, M_1'') und (M_2', N_2, M_2'') der Determinante $\varDelta\Theta_1 m$ sind jetzt identisch und können als eigentlich primitiv vorausgesetzt werden;

g_1 und g_2 sind äquivalent, und es ist eine Transformation von g_1 in g_2 zu suchen.

Zunächst transformire ich (M_1', N_1, M_1'') durch eine Substitution

$$\begin{pmatrix} \varrho' & \sigma' \\ \varrho'' & \sigma'' \end{pmatrix}$$

in eine Form (M_3', N_3, M_3''), in welcher M_3'' eine in $2\Omega\varDelta\Theta m$ nicht aufgehende Primzahl ist, welche für gerades m als $\equiv -\Omega \pmod{4}$ vorausgesetzt werden darf. Ausserdem kann $N_3 \equiv 0 \pmod{\Theta_1\Theta_2}$ gemacht werden, also $M_3' \equiv 0 \pmod{\Theta_1}$. Nun setze ich

$$G_1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho' & \sigma' \\ 0 & \varrho'' & \sigma'' \end{pmatrix} = G_3; \quad \text{also auch} \quad g_1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'' & -\varrho'' \\ 0 & -\sigma' & \varrho' \end{pmatrix} = g_3,$$

$$G_2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho' & \sigma' \\ 0 & \varrho'' & \sigma'' \end{pmatrix} = G_4; \quad \text{also} \quad g_2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'' & -\varrho'' \\ 0 & -\sigma' & \varrho' \end{pmatrix} = g_4.$$

Dann wird

$$m_3 = m_4 = m, \quad M_4'' = M_3'', \quad N_4 = N_3 \equiv 0, \quad N_3' = N_1'\sigma'' + N_1''\sigma' \equiv 0,$$
$$N_3'' = N_1'\varrho'' + N_1''\varrho' \equiv 0;$$

ebenso

$$N_4' \equiv N_4'' \equiv n_3' \equiv n_4' \equiv n_3'' \equiv n_4'' \equiv 0; \quad \text{alles mod.}\,\Theta_1\Theta_2,$$

und somit folgt aus den Gleichungen

$$n_3''^2 - m_3 m_3' = \Omega\Theta_2^2 M_3'', \quad N_3'^2 - M_3 M_3'' = \varDelta\Theta_1 m_3' \quad \text{etc.}$$

auch noch

$$m_3' \equiv m_4' \equiv M_3 = M_1 \equiv M_4 = M_2 \equiv 0 \pmod{\Theta_2^2}.$$

Nun sind

$$\psi_3 = (m_3, n_3'', m_3'), \quad \psi_4 = (m_4, n_4'', m_4')$$

eigentlich primitive Formen derselben Determinante $\Omega\Theta_2^2 M_3''$ mit demselben ersten Coefficienten $\sigma p q$. Aus den Gleichungen und Congruenzen

$$N_1 = N_2 \quad \text{oder} \quad m n_1 - n_1' n_1'' = m n_2 - n_2' n_2'',$$
$$n_3'' = -n_1'\sigma' + n_1''\sigma'', \quad n_4'' = -n_2'\sigma' + n_2''\sigma'',$$
$$n_2'' \equiv e'' n_1'' \pmod{p}, \quad n_2'' \equiv -e'' n_1'' \pmod{\sigma q}, \quad e'' = \pm 1,$$

folgt aber

$$n_1' n_1'' \equiv n_2' n_2'' \pmod{\sigma p q},$$
$$n_2' \equiv e'' n_1' \pmod{p}, \quad n_2' \equiv -e'' n_1' \pmod{\sigma q},$$
$$n_4'' \equiv e'' n_3'' \pmod{p}, \quad n_4'' \equiv -e'' n_3'' \pmod{\sigma q}.$$

Ferner ist

$$(m_3,\ n_3'') = (p,\ n_3'')(\sigma q,\ n_3''); \quad (m_4,\ n_4'') = (p,\ e''n_3'')(\sigma q,\ -e''n_3'')$$

und durch die Formen $(p,\ n_3'',\ \sigma q m_3')$ und $(\sigma q,\ n_3'',\ p m_3')$ kann man bezw. zwei verschiedene positive, in $2\Omega\Delta\Theta M_3''$ nicht aufgehende Primzahlen p_1 und q_1 darstellen, für welche die Fundamentalauflösung $T,\ U$ der Gleichung

$$t^2 - p_1 q_1 \Delta\Theta_1 u^2 = 1$$

der Bedingung $T \equiv e\ (\text{mod.} p_1)$, $T \equiv -e\ (\text{mod.} q_1)$ entspricht, wo $e = \pm 1$ ist.

Sind jetzt $z,\ z'$ zwei solche Wurzeln der Congruenz $z^2 \equiv \Omega\Theta_2^2 M_3''$ $(\text{mod.} p_1 q_1)$ für welche

$$z' \equiv z\ (\text{mod.} p_1), \quad z' \equiv -z\ (\text{mod.} q_1)$$

ist, so ist von den Formen

$$(p_1 q_1,\ z,\ r_1) \quad \text{und} \quad (p_1 q_1,\ z',\ r_1')$$

der Determinante $\Omega\Theta_2^2 M_3''$ die erste mit ψ_3 eigentlich, die zweite mit ψ_4 eigentlich oder uneigentlich äquivalent, je nachdem $e'' = +1$ oder -1 ist, wenn man z so wählt, dass für die *Klassen* die Gleichungen gelten:

$$(p_1,\ z) = (p_1,\ z') = (p,\ n_3''), \quad (q_1,\ z) = (q_1,\ -z') = (\sigma q,\ n_3'').$$

Ausserdem kann man $z \equiv z' \equiv 0\ (\text{mod.} \Theta_1\Theta_2)$ machen, wodurch $r_1 \equiv r_1' \equiv 0$ $(\text{mod.} \Theta_2^2)$ wird.

Ist

$$\psi_3\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \alpha' & \beta'\end{pmatrix} = (p_1 q_1,\ z,\ r_1), \quad \alpha\beta' - \beta\alpha' = 1,$$

so setze ich

$$g_3\begin{pmatrix}\alpha & \beta & 0 \\ \alpha' & \beta' & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = g_5, \quad \text{also} \quad G_3\begin{pmatrix}\beta' & -\alpha' & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = G_5,$$

$$g_5\begin{pmatrix}1 & N_5'U & 0 \\ 0 & T+N_5U & -M_5'U \\ 0 & M_5''U & T-N_5U\end{pmatrix} = g_7, \quad G_5\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ -N_5'U(T-N_5U) & T-N_5U & -M_5''U \\ -M_5'N_5'U^2 & M_5'U & T+N_5U\end{pmatrix} = G_7.$$

Dann ist

$$m_7 = m_5 = p_1 q_1, \quad n_7'' = n_5''T = zT \equiv ez'\ (\text{mod.} p_1 q_1), \quad M_7'' = M_5'' = M_3'',$$

und $(m_7,\ ee''n_7'',\ m_7')$ ist eigentlich äquivalent mit ψ_4. Es sei

$$(m_7,\ ee''n_7'',\ m_7')\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_1' & \beta_1'\end{pmatrix} = \psi_4, \quad \alpha_1\beta_1' - \beta_1\alpha_1' = 1,$$

$$g_4\begin{pmatrix} \beta'_1 & -\beta_1 & 0 \\ -\alpha'_1 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = g_6; \quad \text{also} \quad G_4\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha'_1 & 0 \\ \beta_1 & \beta'_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = G_6,$$

und

$$m_7 = m_6, \quad m'_7 = m'_6, \quad ee''n''_7 = n''_6, \quad M''_7 = M''_3 = M''_4 = M''_6;$$

daher

$$N_7^2 - M'_7 M''_7 = N_6^2 - M'_6 M''_6, \quad N'^2_7 - M_7 M''_7 = N'^2_6 - M_6 M''_6,$$
$$ee''(N_7 N'_7 - M''_7 N''_7) = N_6 N'_6 - M''_6 N''_6,$$
$$N_7^2 \equiv N_6^2, \quad N'^2_7 \equiv N'^2_6, \quad ee'' N_7 N'_7 \equiv N_6 N'_6 \ (\text{mod.} M''_3),$$

und da M''_3 Primzahl ist:

$$N_7 \equiv e' N_6, \quad N'_7 \equiv ee'e'' N'_6 \ (\text{mod.} M''_3), \quad e' = \pm 1.$$

Setzt man

$$N_7 = e' N_6 + M''_3 \nu, \quad N''_7 = ee'e'' N'_6 + M''_3 \nu',$$

so wird

$$G_6\begin{pmatrix} ee'e'' & 0 & 0 \\ 0 & e' & 0 \\ \nu' & \nu & 1 \end{pmatrix} = G_7, \quad g_6\begin{pmatrix} e' & 0 & -e'\nu' \\ 0 & ee'e'' & -ee'e''\nu \\ 0 & 0 & ee'' \end{pmatrix} = g_7,$$

und g_1 geht in g_2 über durch die zusammengesetzte Substitution:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'' & -\varrho'' \\ 0 & -\sigma' & \varrho' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha' & \beta' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & N'_5 U & 0 \\ 0 & T+N_5 U & -M'_5 U \\ 0 & M''_5 U & T-N_5 U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e' & 0 & ee''\nu' \\ 0 & ee'e'' & ee''\nu \\ 0 & 0 & ee'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha'_1 & \beta'_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho' & \varrho'' \\ 0 & \sigma' & \sigma'' \end{pmatrix}.$$

29. Von den Substitutionen dieser Zusammensetzung ändern die erste und letzte den Charakter des Decidenten mod. Γ_1 nicht; es genügt daher für diesen Modul die Transformation von g_3 in g_4 zu betrachten. Nun ist aber

$$\left.\begin{array}{ll} N_5 = N_3\alpha - N'_3\alpha' \equiv 0, & N'_5 = -N_3\beta + N'_3\beta' \equiv 0 \\ N_6 = N_4\beta'_1 + N'_4\alpha'_1 \equiv 0, & N'_6 = N_4\beta_1 + N'_4\alpha_1 \equiv 0 \end{array}\right\} (\text{mod.}\Theta_1\Theta_2),$$

und weil

$$N_5^2 - M'_5 M''_5 = \varDelta\Theta_1 m_5, \quad M''_5 N''_5 - N_5 N'_5 = \varDelta\Theta_1 n''_5,$$

auch

$$M'_5 \equiv N''_5 \equiv 0 \ (\text{mod.}\Theta_1)$$

und hieraus

$$N_7 \equiv N'_7 \equiv \nu \equiv \nu' \equiv 0 \ (\text{mod.}\Theta_1).$$

Demnach ist die Substitution, welche g_3 in g_4 überführt,

$$\equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha' & \beta' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & M_3''U & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e' & 0 & 0 \\ 0 & ee'e'' & 0 \\ 0 & 0 & ee'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_1' & \beta_1' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{\Theta_1}.$$

Der erste Coefficient dieser zusammengesetzten Substitution ist

$$\equiv e'(\alpha\alpha_1 + ee''T\alpha_1'\beta) \pmod{\Theta_1};$$

und da $n_3' \equiv n_3'' \equiv 0 \pmod{\Theta_1}$ ist, besteht für die Decidenten $\mathfrak{D}_4$ und $\mathfrak{D}_3$ von g_4 und g_3, also auch für die Decidenten $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ von g_1 und g_2 die Relation

$$\left(\frac{\mathfrak{D}_2}{\theta_1}\right) = \left(\frac{2}{\theta_1}\right)\left(\frac{1-\varkappa'}{\theta_1}\right)\left(\frac{\mathfrak{D}_1}{\theta_1}\right),$$

wo

$$-\varkappa' \equiv e'\frac{m_3(\alpha\alpha_1 + ee''T\alpha_1'\beta)}{\sqrt{m_4 m_3}} \pmod{\theta_1}$$

oder

$$\pm\varkappa' \equiv \alpha\alpha_1 + ee''T\alpha_1'\beta \pmod{\theta_1}$$

für jeden Primfactor θ_1 von Γ_1'.

Um die Relation zwischen den Decidenten mod. Γ_2' zu finden, ist der letzte Coefficient Γ'' der Transformation von g_2 in g_1, oder was auf dasselbe herauskommt, der letzte Coefficient γ'' der Transformation von g_1 in g_2 zu berechnen.

Aus den Transformationsgleichungen

$$m\alpha^2 + 2n_3''\alpha\alpha' + m_3'\alpha'^2 = p_1 q_1, \quad m\alpha\beta + n_3''(\alpha\beta' + \beta\alpha') + m_3'\alpha'\beta' = z$$

folgt

$$m\alpha^2 \equiv p_1 q_1, \quad m\alpha\beta \equiv 0 \pmod{\Theta_2};$$

daher

$$\beta \equiv 0 \pmod{\Theta_2},$$

und entsprechend erhält man, weil $n_7'' = zT \equiv n_4'' \equiv 0 \pmod{\Theta_2}$ ist, auch

$$\beta_1 \equiv 0 \pmod{\Theta_2}.$$

Ferner ist mod. Θ_2:

$$N_5'' = -M_3\alpha'\beta' - M_3'\alpha\beta + N_3''(\alpha\beta' + \beta\alpha') \equiv 0, \quad N_7 \equiv N_7' \equiv N_7'' \equiv N_6'' \equiv 0;$$

daher auch

$$\nu \equiv \nu' \equiv 0 \pmod{\Theta_2}.$$

Demzufolge findet man

$$\gamma'' \equiv ee'e''(-\beta'\sigma'T + \varrho' M_5''U)\beta_1'\varrho'' + ee''(\beta'\sigma' M_5'U + \varrho'T)\sigma'' \pmod{\Theta_2}.$$

30. Behufs weiterer Umformungen sind die Substitutionen

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \alpha' & \beta'\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha'_1 & \beta'_1\end{pmatrix}$$

zu einander in Beziehung zu setzen. Um geeignete Ausdrücke für dieselben zu finden, suche ich Substitutionen, welche (p_1, z) und (q_1, z) bezw. in (p, n''_3) und $(\sigma q, n''_3)$ transformiren. Es sei

$$(p_1,\ z,\ q_1 r_1)\begin{pmatrix}\xi & \eta \\ \xi' & \eta'\end{pmatrix} = (p,\ n''_3,\ \sigma q m'_3),\quad (q_1,\ z,\ p_1 r_1)\begin{pmatrix}\xi_1 & \eta_1 \\ \xi'_1 & \eta'_1\end{pmatrix} = (\sigma q,\ n''_3,\ p m'_3),$$

wo $\xi\eta'-\eta\xi' = \xi_1\eta'_1-\eta_1\xi'_1 = 1$. Hieraus ergiebt sich wie in Art. 26 eine Transformation

$$(p_1 q_1,\ z,\ r_1)\begin{pmatrix}\beta' & -\beta \\ -\alpha' & \alpha\end{pmatrix} = (\sigma p q,\ n''_3,\ m'_3),\quad \alpha\beta'-\beta\alpha' = 1,$$

in welcher

$$\beta' = \xi\xi_1 - r_1\xi'\xi'_1,\quad -\alpha' \equiv p_1\xi\xi'_1 + q_1\xi_1\xi' \ (\text{mod.}\,\Theta_1\Theta_2).$$

Ausserdem folgen aus den Congruenzen

$$p_1 q_1 \beta'^2 + r_1\alpha'^2 \equiv \sigma p q,\quad p_1 q_1 \beta\beta' + r_1 \alpha\alpha' \equiv 0 \ (\text{mod.}\,\Theta_1)$$

die weiteren

$$p_1 q_1 \beta' \equiv \sigma p q \alpha,\quad r_1\alpha' \equiv -\sigma p q \beta;$$

daher ist

$$\alpha\alpha_1 + e e'' T \alpha'_1 \beta \equiv \frac{p_1 q_1 \alpha_1 \beta' - e e'' T r_1 \alpha' \alpha'_1}{\sigma p q} \ (\text{mod.}\,\Theta_1).$$

Aus

$$(p_1,\ e e'' T z)\begin{pmatrix}1 & -e e''\dfrac{T-e}{p_1} z \\ 0 & 1\end{pmatrix} = (p_1,\ e'' z);\quad (q_1,\ e e'' T z)\begin{pmatrix}1 & -e e''\dfrac{T+e}{q_1} z \\ 0 & 1\end{pmatrix} = (q_1,\ -e'' z)$$

folgt ferner

$$(p_1,\ e e'' T z)\begin{pmatrix}1 & -e e''\dfrac{T-e}{p_1} z \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi & e''\eta \\ e''\xi' & \eta'\end{pmatrix} = (p,\ e'' n''_3),$$

$$(q_1,\ e e'' T z)\begin{pmatrix}1 & -e e''\dfrac{T+e}{q_1} z \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1 & -e''\eta_1 \\ -e''\xi'_1 & \eta'_1\end{pmatrix} = (\sigma q,\ -e'' n''_3),$$

und hieraus für die Coefficienten α_1, α'_1 der Transformation

$$(p_1 q_1,\ e e'' T z)\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha'_1 & \beta'_1\end{pmatrix} = (\sigma p q,\ n''_4,\ m'_4),$$

da $z \equiv 0$, $m'_7 \equiv r_1$ (mod. $\Theta_1\Theta_2$) ist:

$$\alpha_1 \equiv \xi\xi_1 + r_1\xi'\xi'_1,\quad \alpha'_1 \equiv e''(-p_1\xi\xi'_1 + q_1\xi_1\xi') \ (\text{mod.}\,\Theta_1\Theta_2);$$

daher

$$\alpha\alpha_1+ee''T\alpha_1'\beta \equiv \frac{p_1q_1(\xi^2\xi_1^2-r_1^2\xi'^2\xi_1'^2)-eTr_1(p_1^2\xi^2\xi_1'^2-q_1^2\xi_1^2\xi'^2)}{\sigma pq} \pmod{\Theta_1},$$

und weil

$$p_1\xi^2+q_1r_1\xi'^2\equiv p,\quad q_1\xi_1^2+p_1r_1\xi_1'^2\equiv \sigma q \pmod{\Theta_1},$$

auch

$$\alpha\alpha_1+ee''T\alpha_1'\beta \equiv -1+\frac{\sigma p_1q\xi^2+pq_1\xi_1^2-eT(\sigma p_1q\xi^2-pq_1\xi_1^2)}{\sigma pq} \pmod{\Theta_1}.$$

Je nachdem $T\equiv e \pmod{\theta_1}$ oder $\equiv -e \pmod{\theta_1}$, erhält man also

$$\frac{1\pm\varkappa'}{2}\equiv\frac{q_1\xi_1^2}{\sigma q}\quad\text{oder}\quad\equiv\frac{p_1\xi^2}{p} \pmod{\theta_1}$$

und entsprechend

$$\left(\frac{2(1\pm\varkappa')}{\theta_1}\right)=\left(\frac{\sigma qq_1}{\theta_1}\right)\quad\text{oder}\quad=\left(\frac{pp_1}{\theta_1}\right).$$

Aus $T^2-1=p_1q_1\varDelta\Theta_1U^2$ folgt aber

$$T-e=\sigma'p_1\varDelta_1'\varDelta_2'^2\Theta_1'v^2,\quad T+e=\sigma'q_1\varDelta_1''\varDelta_2''^2\Theta_1''w^2,$$

wo $\sigma'=1$ oder 2, $\varDelta_1'\varDelta_1''=\varDelta_1$, $\varDelta_2'\varDelta_2''=\varDelta_2$, $\Theta_1'\Theta_1''=\Theta_1$, $\sigma'vw=U$, und somit für jeden Primfactor θ_1' von Θ_1', θ_1'' von Θ_1'':

$$T\equiv e \pmod{\theta_1'},\qquad \left(\frac{\sigma'q_1\varDelta_1''\Theta_1''}{\theta_1'}\right)=\left(\frac{T+e}{\theta_1'}\right)=\left(\frac{2e}{\theta_1'}\right),$$

$$T\equiv -e \pmod{\theta_1''},\quad \left(\frac{\sigma'p_1\varDelta_1'\Theta_1'}{\theta_1''}\right)=\left(\frac{T-e}{\theta_1''}\right)=\left(\frac{-2e}{\theta_1''}\right)$$

und

$$\left(\frac{1\pm\varkappa'}{\theta_1'}\right)=\left(\frac{e\sigma\sigma'q\varDelta_1''\Theta_1''}{\theta_1'}\right),\quad \left(\frac{1\pm\varkappa'}{\theta_1''}\right)=\left(\frac{-e\sigma'p\varDelta_1'\Theta_1'}{\theta_1''}\right);$$

und da

$$\left(\frac{\sigma pq}{\theta_1}\right)=\left(\frac{m}{\theta_1}\right)=\left(\frac{-\varDelta_1\Theta_1\theta_1^{-1}}{\theta_1}\right)$$

ist für jeden Primfactor θ_1 von Γ_1, so ist auch noch

$$\left(\frac{1\pm\varkappa'}{\theta_1'}\right) = \left(\frac{-e\sigma'p\varDelta_1'\Theta_1'\theta_1'^{-1}}{\theta_1'}\right).$$

31. Für den Modul Θ_2 erhält man aus $\beta\equiv\beta_1\equiv r_1\equiv 0$ und den Congruenzen für α_1, α_1':

$$\alpha\beta'\equiv\alpha_1\beta_1'\equiv 1,\quad \alpha_1\equiv\xi\xi_1\equiv\beta',\quad \beta'\beta_1'\equiv 1,\quad \alpha\equiv\beta_1'$$

und somit

$$M_5'=M_3\alpha'^2-2N_3''\alpha\alpha'+M_3'\alpha^2\equiv M_3'\alpha^2\equiv M_3'\beta_1'^2,$$

$$(\gamma''.)\qquad ee''\gamma''\equiv(T\varrho'+M_3'U\beta_1'\sigma')\sigma''-e'(T\sigma'-M_3''U\varrho'\beta_1')\varrho''.$$

Da die Determinante $\Delta\Theta_1 m$ der Form (M_3', N_3, M_3'') prim ist zu Θ_2, so kann man zu den bisherigen Voraussetzungen über M_3'' (Art. 28) noch die weitere hinzufügen, dass $M_1'' M_3'' R \Theta_2$. Dann folgt aus

$$N_3^2 - M_3' M_3'' = \Delta\Theta_1 m \quad \text{und} \quad \left(\frac{-\Delta\Theta_1 m}{\theta_2}\right) = +1$$

(für jeden Primfactor θ_2 von Γ_2) noch weiter $M_3' M_3'' R \theta_2$ und $M_3' M_1'' R \theta_2$, und man kann setzen:

$$(T\varrho' + M_3' U \beta_1' \sigma')\sqrt{\frac{M_3''}{M_1''}} \equiv \varkappa, \quad (T\sigma' - M_3'' U \beta_1' \varrho')\sqrt{\frac{M_3'}{M_1''}} \equiv \lambda,$$

$$\sigma'' \sqrt{\frac{M_1''}{M_3''}} \equiv \varkappa_1, \quad \varrho'' \sqrt{\frac{M_1''}{M_3'}} \equiv \lambda_1 \ (\text{mod.}\theta_2).$$

Dann wird

$$\varkappa^2 + \lambda^2 \equiv \frac{1}{M_1''}(T^2 + M_3' M_3'' U^2 \beta_1'^2)(M_3'' \varrho'^2 + M_3' \sigma'^2) \ (\text{mod.}\theta_2)$$

oder da

$$M_3'' \varrho'^2 + M_3' \sigma'^2 \equiv M_1'', \quad p_1 q_1 \equiv m \beta_1'^2, \quad T^2 + M_3' M_3'' U^2 \beta_1'^2 \equiv T^2 - \Delta\Theta_1 p_1 q_1 U^2 = 1$$

$$\varkappa^2 + \lambda^2 \equiv 1 \ (\text{mod.}\theta_2).$$

Ebenso wird

$$\varkappa_1^2 + \lambda_1^2 \equiv M_1''\left(\frac{\sigma''^2}{M_3''} + \frac{\varrho''^2}{M_3'}\right) \equiv \frac{M_1''}{M_3' M_3''}(M_3'' \varrho''^2 + M_3' \sigma''^2) \equiv \frac{M_1' M_1''}{M_3' M_3''} \equiv 1 \ (\text{mod.}\theta_2).$$

Daher ist

$$e e'' \gamma'' \equiv \varkappa\varkappa_1 - e' \lambda\lambda_1 \equiv \varkappa\varkappa_1 - e'\sqrt{(1-\varkappa^2)(1-\varkappa_1^2)} \ (\text{mod.}\theta_2).$$

Das Vorzeichen von e' ist nach Art. 23, 1) gleichgültig und man erhält für $e' = +1$ aus $(\gamma''.)$:

$$e e'' \gamma'' \equiv T + (M_3' \sigma' \sigma'' + M_3'' \varrho' \varrho'') U \beta_1' \equiv T \ (\text{mod.}\Theta_2),$$

da $M_3' \sigma' \sigma'' + M_3'' \varrho' \varrho'' \equiv N_1 \equiv 0 \ (\text{mod.}\Theta_2)$, und daher (für $\varkappa' \equiv \gamma''$)

$$\pm\varkappa' \equiv eT \ (\text{mod.}\theta_2).$$

Nun ist

$$1 + eT = e(T+e) = e\sigma' q_1 \Delta_1'' \Delta_2''^2 \Theta_1'' w^2, \quad 1 - eT = -e(T-e) = -e\sigma' p_1 \Delta_1' \Delta_2'^2 \Theta_1' v^2,$$

$$\left(\frac{1+eT}{\theta_2}\right) = \left(\frac{e\sigma' q_1 \Delta_1'' \Theta_1''}{\theta_2}\right), \quad \left(\frac{1-eT}{\theta_2}\right) = \left(\frac{-e\sigma' p_1 \Delta_1' \Theta_1'}{\theta_2}\right)$$

und weil $p_1 \xi^2 \equiv p$, $q_1 \xi_1^2 \equiv \sigma q \ (\text{mod.}\Theta_2)$, $\left(\frac{-\Delta_1 \Theta_1 \sigma p q}{\theta_2}\right) = +1$, so ist für jeden Primfactor θ_2 von Γ_2:

$$\left(\frac{1 \pm \varkappa'}{\theta_2}\right) = \left(\frac{-e\sigma' p \Delta_1' \Theta_1'}{\theta_2}\right).$$

Diese Gleichung stimmt mit der für die Moduln θ_1 gefundenen völlig überein, und man hat daher für jeden Grundfactor θ die Beziehung:

$$\left(\frac{\mathfrak{D}_2}{\theta}\right) = \left(\frac{p}{\theta}\right)\left(\frac{d'}{\theta}\right)\left(\frac{\mathfrak{D}_1}{\theta}\right),$$

wo d einen Theiler von $2\varDelta_1\Theta_1$ bedeutet und $d' = d\theta^{-1}$ oder $= d$ ist, je nachdem θ in d aufgeht oder nicht.

Die Formen des Geschlechts G, welche die zu derselben Congruenzwurzel gehörenden Darstellungen von φ_1 und φ_2 liefern, sind somit äquivalent oder nicht, je nachdem der Totalcharakter von p zu $\mathfrak{G}$ gehört oder nicht.

32. Bezeichnet $\mathfrak{D}_1'$ einen zu einer anderen Congruenzwurzel gehörenden Decidenten der Darstellung von φ_1, so ist nach Art. 27

$$\left(\frac{\mathfrak{D}_1}{\theta}\right) = \left(\frac{d''\mathfrak{M}_1}{\theta}\right)\left(\frac{\mathfrak{D}_1'}{\theta}\right);$$

daher

$$\left(\frac{\mathfrak{D}_2}{\theta}\right) = \left(\frac{p\,d'''\mathfrak{M}_1}{\theta}\right)\left(\frac{\mathfrak{D}_1'}{\theta}\right),$$

wo d'' und d''' eine analoge Bedeutung haben wie d'. Ist daher $\mathfrak{H}''$ das Product der Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$, so sind die Complexe C_{φ_1} und C_{φ_2} gleich oder verschieden, je nachdem der Totalcharakter von p zu $\mathfrak{H}''$ gehört oder nicht, und die vorige Gleichung zeigt wie in letzterem Falle der Complex C_{φ_2} aus C_{φ_1} erhalten wird. Aus

$$\varphi_1 = (\sigma p q,\ n_1'') = (p,\ n_1'')(\sigma q,\ n_1''),\quad \varphi_2 = (\sigma p q,\ n_2'') = (p,\ e''n_1'')(\sigma q,\ -e''n_1'')$$

folgt nämlich, wenn φ_1 und φ_2 eigentlich primitiv sind:

$$\varphi_1\varphi_2 = (p,\ n_1'')^2 \quad \text{oder} \quad = (\sigma q,\ n_1'')^2,$$

je nachdem $e'' = +1$ oder $= -1$ ist. Da nun nach Art. 15 für die Grundfactoren θ

$$\left(\frac{\sigma q}{\theta_1}\right) = \left(\frac{-\varDelta_1\Theta_1\theta_1^{-1}p}{\theta_1}\right),\quad \left(\frac{\sigma q}{\theta_2}\right) = \left(\frac{-\varDelta_1\Theta_1 p}{\theta_2}\right)$$

ist und die Gesammtcharaktere mod. Γ der Ambigen der Determinante $\Omega\Theta M''$ sämmtlich zu $\mathfrak{H}''$ gehören, so ergiebt sich der Satz:

$\mathfrak{F}$. ***Die Gruppen, welche zu den Complexen C_{φ_1} und C_{φ_2} gehören, entstehen aus einander durch Multiplication mit dem Gesammtcharakter mod. Γ irgend einer Klasse, deren Duplication die Klasse $\varphi_1\varphi_2$ giebt.***

Sind φ_1 und φ_2 uneigentlich primitiv, so ist $\sigma = 2$ und

$$\varphi_1 = (2,\ 1)(p,\ n_1'')(q,\ n_1'') = (2,\ 1)\psi_1,$$
$$\varphi_2 = (2,\ 1)(p,\ e''n_1'')(q,\ -e''n_1'') = (2,\ 1)\psi_2,$$

wo ψ_1 und ψ_2 eigentlich primitiv sind und $\psi_1\psi_2 = (p, n_1'')^2$ oder $= (q, n_{1\mathfrak{k}}'')^2$, u. s. w.

Hält man φ_1 fest und lässt (p, n_1'') alle eigentlich primitiven Klassen der Determinante $\Omega\Theta M''$ durchlaufen, so durchläuft φ_2 alle Klassen von G_φ (jede so oft als es eigentlich primitive ambige Klassen giebt). Dabei kann (p, n_1''), daher auch der Totalcharakter von $\mathfrak{D}_2$, jeden Gesammtcharakter mod. Γ annehmen (ausgenommen, wenn $\Omega M'' = 1$, $\Theta \equiv 1 \pmod{4}$, $\Theta_1\Theta_2 = \Gamma$ ist), woraus folgt:

𝔊. *Jede Klasse des ternären Geschlechtes G kann (und zwar jede gleich viele) Klassen des binären Geschlechtes G_φ darstellen.*

Ist $2^{\mathfrak{h}''}$ die Ordnung von $\mathfrak{H}''$, so ist $2^{m-\mathfrak{h}''}$ die Anzahl der Complexe, aus denen das Geschlecht G besteht.

Reducirt sich Θ auf eine Primzahl θ und sind die Bedingungen (θ.) des Art. 20 erfüllt, enthält also das Geschlecht G zwei Klassen f_1 und f_2, so zerfallen dieselben nur dann in zwei verschiedene Complexe, wenn $\mathfrak{h}'' = 0$ ist, somit alle Charaktere der Primitivtheiler von M'' positiv sind, was nur dann eintritt, wenn M'' keinen Primfactor, welcher $N\theta$ ist, in ungerader Potenz enthält. Alsdann stellt f_1 die eine, f_2 die andere Hälfte der Klassen von G_φ dar, indem zwei Klassen φ_1 und φ_2 durch dieselbe oder verschiedene der Klassen f_1, f_2 dargestellt werden, je nachdem die Klassen, durch deren Duplication $\varphi_1\varphi_2$ entsteht, alle $R\theta$ oder alle $N\theta$ sind.

Beispiel: $\Omega = 1$, $\Delta = 13$, $\theta = 17$.

Die primitiven indefiniten Formen der Invarianten 17, 13.17 zerfallen in acht Geschlechter, von denen diejenigen zwei, für welche $\left(\frac{f}{17}\right) = \left(\frac{F}{17}\right) = +1$ ist, je zwei Klassen enthalten. Da dem Charakter $\left(\frac{F}{13}\right) = +1$ ein Nullgeschlecht entspricht, beschränke ich mich auf dasjenige Geschlecht, für welches $\left(\frac{F}{13}\right) = -1$ ist und durch dessen Formen die Null nicht rational darstellbar ist. Diese Formen entstammen der Form $\begin{pmatrix} -1, & 2, & 15.17 \\ 17, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ der Invarianten 1, 13.17 und können nach Art. 17 repräsentirt werden durch

$$f_1 = \begin{pmatrix} -1, & 2.17^2, & 15.17 \\ 17^2, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1, & 2.17^2, & 15.17 \\ 17^2, & 17, & 2.17 \end{pmatrix}$$

$$\left(f_2 \text{ ist auch äq. } \begin{pmatrix} 1, & -2.17^2, & -2.17 \\ 17^2, & 0, & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Soll nun eine positive binäre Form φ der Determinante $-1802 = -17.2.53$, wo $\left(\frac{2.53}{17}\right) = +1$, $\left(\frac{2.53}{13}\right) = -1$ ist, durch f_1 oder f_2 darstellbar sein, so muss

$$\left(\frac{\varphi}{17}\right) = +1, \quad \left(\frac{\varphi}{53}\right) = \left(\frac{13}{53}\right) = +1$$

sein, so dass von den vier Geschlechtern der Determinante -1802 nur das Hauptgeschlecht in Betracht kommt. Setzt man

$$(3,\ 1,\ 601) = \alpha, \quad (2,\ 0,\ 901) = \beta,$$

so lassen sich durch den Ausdruck $\alpha^k\beta^l$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, 15$; $l = 1, 2$) alle positiven Klassen der Determinante -1802 repräsentiren, wobei für das Hauptgeschlecht k und l gerade sind. Da nun $53\,R17$ ist, zerfallen diese Klassen in zwei Hälften, und da $\alpha N17$, $\beta R17$ ist, so ist für die eine Hälfte $k \equiv 0$, für die andere $k \equiv 2$ (mod.4); denn $\alpha^k\beta^l.\alpha^{k'}\beta^{l'} = (\alpha^{\frac{k+k'}{2}}\beta^{\frac{l+l'}{2}})^2$ und $\alpha^{\frac{k+k'}{2}}\beta^{\frac{l+l'}{2}}$ ist $R17$ oder $N17$, je nachdem $k+k' \equiv 0$ oder 2 (mod.4); und zwar ist $\alpha^k\beta^l$ durch f_1 oder f_2 darstellbar, je nachdem $k \equiv 2$ oder 0 (mod.4) ist. In der That wird die Hauptklasse $\alpha^0 = (1,\ 0,\ 1802)$ durch f_2 dargestellt, wenn man setzt: $x = y - 5.17y'$, $x' = -y'$, $x'' = 7y'$.

§ 5.

Untersuchung der Darstellbarkeit von Zahlen durch ternäre Formen. — Die vollständige Induction.

33. Die Zahl m sei durch eine (primitive indefinite) ternäre Form f der Invarianten Ω, Δ darzustellen. Zunächst setze ich nur voraus, dass $\Omega\Delta$, wie hier immer, ungerade sei, m prim zu $\Omega\Delta$ und dass es sich um eigentliche Darstellungen handle. Um die Aufgabe zu lösen ist nach Disq. arithm. Art. 280 und 281 ein vollständiges System von nicht äquivalenten binären Formen Φ der Determinante Δm aufzustellen, hierauf sind alle eigentlichen Darstellungen jeder dieser Formen durch die adjungirte Form F von f zu suchen und aus jeder derselben die Darstellungen von m durch f abzuleiten. Hier soll nur die *Möglichkeit* der Darstellung erörtert werden.

Nach Art. 16 muss die Form Φ primitiv sein und in Bezug auf alle ungeraden Primfactoren ω, δ, μ von Ω, Δ, m den Bedingungen genügen

$$(\text{A.}) \quad \begin{cases} \left(\frac{m}{\omega}\right) = \left(\frac{f}{\omega}\right), \quad \left(\frac{\Phi}{\delta}\right) = \left(\frac{F}{\delta}\right), \quad \left(\frac{\Phi}{\mu}\right) = \left(\frac{\Omega}{\mu}\right); \\ \text{ausserdem } \Phi \equiv \Omega \text{ (mod.4 od. 8, je nachdem } m \equiv 4 \text{ od. 0, mod.8);} \end{cases}$$

und diese Bedingungen sind auch hinreichend für die Darstellbarkeit von Φ durch F und somit auch von m durch f, wenn das Geschlecht von f nur *eine* Klasse enthält. Letzteres vorausgesetzt, fragt es sich also nur, ob ein Geschlecht von primitiven nicht negativen binären Formen der Determinante Δm existire, das den Bedingungen (A.) genügt. Dies ist in der That der Fall, wenn $\Delta m \equiv 2, 3, 5, 6, 7 \pmod{8}$. Denn ist $\Delta m \equiv 2$ oder $3 \pmod{4}$, so bilden die Charaktere in Bezug auf δ und μ nicht den Totalcharakter von Φ; es kommt vielmehr noch ein Charakter mod. 8 oder 4 hinzu. Da nun alle Charaktere mit Ausnahme eines einzigen willkürlich gewählt werden können, so kann auch, wenn $\left(\frac{m}{\omega}\right) = \left(\frac{f}{\omega}\right)$ ist, den Bedingungen (A.) stets genügt werden.

Ist $\Delta m \equiv 5 \pmod{8}$, so existiren auch uneigentlich primitive Formen der Determinante Δm, welchen zusammen mit den eigentlich primitiven alle angebbaren Totalcharaktere zukommen.

Ist dagegen $\Delta m \equiv 1 \pmod{8}$, so haben eigentlich und uneigentlich primitive Formen denselben Complex von Totalcharakteren, und wenn man mit Δ_2^2, m_2^2 die grössten in Δ und m aufgehenden Quadrate bezeichnet und $\Delta = \Delta_1 \Delta_2^2$, $m = m_1 m_2^2$ setzt, so ist die Existenz eines Geschlechts von binären Formen Φ der Determinante Δm an die Bedingung geknüpft:

$$\Pi\left(\frac{\Phi}{\delta_1}\right) \cdot \Pi\left(\frac{\Phi}{\mu_1}\right) = \left(\frac{\Phi}{\Delta_1 m_1}\right) = +1,$$

wo die Producte sich auf alle in Δ_1, m_1 aufgehenden Primzahlen δ_1, μ_1 erstrecken, oder wegen (A.):

$$\text{(B.)} \qquad \left(\frac{\Omega}{m_1}\right) = \left(\frac{F}{\Delta_1}\right).$$

Ist $m \equiv 0 \pmod{4}$, so setze man $m_1 = m'$ oder $2m'$, je nachdem m_1 ungerade oder gerade ist, und

$$\vartheta = (-1)^{\frac{1}{2}(\Delta_1 m' - 1)}, \quad \eta = (-1)^{m_1 - 1};$$

dann lautet die Bedingung für die Existenz des Geschlechts von Φ:

$$\left(\frac{\Phi}{\Delta_1 m_1}\right) = \vartheta^{\frac{1}{2}(\Phi - 1)} \eta^{\frac{1}{8}(\Phi^2 - 1)},$$

woraus wegen (A.) für m die Bedingung folgt:

$$\text{(B'.)} \qquad \left(\frac{\Omega}{m_1}\right) = \vartheta^{\frac{1}{2}(\Omega - 1)} \eta^{\frac{1}{8}(\Omega^2 - 1)} \left(\frac{F}{\Delta_1}\right).$$

Dies giebt den Satz*):

Damit eine mit $\Omega\Delta$ theilerfremde Zahl m durch die eigentlich primitive Form f der Invarianten Ω, Δ eigentlich darstellbar sei, ist, wenn das Geschlecht von f eine einzige Klasse enthält (was immer der Fall ist, wenn Ω und Δ ungerade und relativ prim sind) und $\Delta m \equiv 2, 3, 5, 6, 7$ (mod. 8) ist, nothwendig und hinreichend, dass $\left(\frac{m}{\omega}\right) = \left(\frac{f}{\omega}\right)$ sei in Bezug auf jeden Primfactor ω von Ω; ist hingegen $\Delta m \equiv 1$ (mod. 8) oder $\equiv 0$ (mod. 4), so kommen bezw. noch die Bedingungen (B.) *und* (B'.) *hinzu.*

Ist speciell $\Omega = 1$, so lässt sich immer eine der Zahlen ± 1 durch f darstellen und f ist daher einer Form $\begin{pmatrix} \pm 1, & a', & a'' \\ b, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ äquivalent.

34. Ist die durch 4 nicht theilbare, zu $\Omega\Delta\Theta$ theilerfremde Zahl m durch eine Form f der Invarianten $\Omega\Theta$, $\Delta\Theta$ darzustellen, für welche die in §§ 3 und 4 gemachten Voraussetzungen gelten, so sind nach dem Satze 𝔊 des Art. 32 in dem im vorigen Artikel betrachteten Geschlechte G_Φ von Formen Φ immer solche vorhanden, welche sich durch die adjungirte Form F von f darstellen lassen, und somit ist m immer durch f darstellbar, wenn ein den aufgestellten Bedingungen genügendes Geschlecht G_Φ überhaupt existirt. Hieraus ergiebt sich der in Art. 16 aufgestellte Satz 𝔄 für solche Invarianten. Ist $\Delta m \equiv 1$ (mod. 8), so muss ausserdem die Bedingung (B.) des vorigen Artikels erfüllt sein, ist dann aber zusammen mit den übrigen in 𝔄 angegebenen Bedingungen auch hinreichend. —

35. Es darf indessen nicht übersehen werden, dass die Entwickelungen von Art. 16 an (mit Ausnahme von Art. 21 und 33) sich auf eben diesen Satz 𝔄 stützen und somit auf einem Cirkelschluss beruhen würden. Dies kann aber durch Anwendung der vollständigen Induction vermieden werden, indem gezeigt wird, dass der Satz für eine Anzahl gemeinschaftlicher Primfactoren der Invarianten richtig ist, wenn er für jede kleinere Anzahl gilt. Nun wurde der Satz 𝔄 einzig benutzt zum Nachweise der Auflösbarkeit der Gleichung (II''.) des Art. 16 mit der Bedingung, dass zugleich die Congruenzen (13.) oder (13'.), (14.) oder (14'.), (16.) oder (16'.), (18.) oder (18'.) des Art. 14 stattfinden sollen (die übrigen Congruenzen folgen aus diesen und (II''.)), und unter der Voraussetzung, dass die Bedingungen (A.), (A_0.), (A'.), u. s. w. erfüllt seien. Um denjenigen dieser

*) Vgl. meine Inauguraldissertation, S. 30.

Congruenzen zu genügen, in welchen p (p_0) nicht vorkommt, bezeichne ich mit Θ''_{10} das Product derjenigen Primfactoren θ_{10} von Θ_{10}, welche in $\alpha_1\gamma_2-\gamma_1\alpha_2$ aufgehen und für welche $\varepsilon R\theta_{10}$ ist, ebenso mit Θ''_{1a} (Θ''_{2b}) das Product der Primfactoren θ_{1a} (θ_{2b}) von Θ_{1a} (Θ_{2b}), welche in $\alpha_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2$, $(\beta_1\delta_2+\delta_1\beta_2)$ aufgehen und für welche $a'a''_0\varepsilon_0 R\theta_{1a}$ $(aa'_0\varepsilon_0 R\theta_{2b})$ ist, und setze

$$\Theta_{10} = \Theta'_{10}\Theta''_{10}, \quad \Theta_{1a} = \Theta'_{1a}\Theta''_{1a}, \quad \Theta_{2b} = \Theta'_{2b}\Theta''_{2b}, \quad q'_1 = \Theta''_{1a}\Theta''_{2b}q'_2.$$

Dann bleiben nebst denjenigen für p (p_0) folgende Congruenzen zu erfüllen:

$$\text{(q.)} \quad q \equiv z q'_2 \ (\text{mod.}\Theta'_{1a}), \quad q''_1 \equiv \Theta''_1 z'' q'_2 \ (\text{mod.}\Theta'_{2b}), \quad q''_1 \equiv 0 \ (\text{mod.}\Theta''_{10}),$$

wo z und z'' (mod. Θ'_{1a} und Θ'_{2b} bezw.) durch die Congruenzen bestimmt sind:

$$z \equiv 0 \ (\text{mod.}\theta'_{1a})$$

oder

$$[a'\alpha_1\alpha_2 - a\gamma_1\gamma_2 + \sqrt{(a\gamma_1^2+a'\alpha_1^2)(a\gamma_2^2+a'\alpha_2^2)}]z$$
$$\equiv (\alpha_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2)a\Omega_{1c}\Omega'^2_{2c}\Omega'_{2a}\Theta''_{1a}\Theta''_{2b} \ (\text{mod.}\theta'_{1a}),$$

je nachdem der Primfactor θ'_{1a} von Θ'_{1a} in $\alpha_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2$ aufgeht oder nicht, und

$$z'' \equiv 0 \ (\text{mod.}\theta'_{2b})$$

oder

$$(\beta_1\delta_2+\delta_1\beta_2)a'_0\Delta'_{1a}\Delta^2_{2a}\Theta''_{10}z''$$
$$\equiv [a''_0\beta_1\beta_2 - a'_0\delta_1\delta_2 + \sqrt{(a'_0\delta_1^2+a''_0\beta_1^2)(a'_0\delta_2^2+a''_0\beta_2^2)}]\Theta''_{1a}\Theta''_{2b} \ (\text{mod.}\theta'_{2b}),$$

je nachdem der Primfactor θ'_{2b} von Θ'_{2b} in $\beta_1\delta_2+\delta_1\beta_2$ aufgeht oder nicht.

Um den Congruenzen (q.) zu entsprechen, setze ich weiter:

$$q = \Theta'_{1a}q_2 + z q'_2, \quad q''_1 = \Theta''_{10}(z'' q'_2 + \Theta'_{2b}q''_2),$$

wodurch die Form $F(q, q'_1, q''_1)$ in (II''.) übergeht in $\Theta''_{10}F_2(q_2, q'_2, q''_2)$, wo F_2 eine primitive Form der Invarianten

$$\Omega_{1c}\Omega^2_{2c}\Delta_{10}\Delta^2_{20}\Theta'_{10}\Theta_{1a}\Theta^2_{2b}\Theta^2_{2\cdot}, \quad \Omega_{1b}\Omega^2_{2b}\Delta_{1a}\Delta^2_{2a}\Theta''_{10}\Theta_{1a}\Theta^2_{20}$$

ist, welche keine kubischen Theiler besitzen und deren grösster gemeinschafticher Theiler Θ_{1a} zu den übrigen Factoren relativ prim ist.

Dass die Bedingungen (m) des Satzes $\mathfrak{A}$ für die Darstellbarkeit der Zahl $m = \Omega_{1b}\Omega'^2_{2b}\Delta'_{1a}\Delta^2_{2a}p_1^2 - \sigma$ durch die Form $\Theta''_{10}\Theta^2_{20}\Theta^2_{2a}F_2(q_2, q'_2, q''_2)$ alle erfüllt sind, wenn es die Bedingungen (A.), (A'.), u. s. w. sind und die Zahlen

p, q, q', q'' den Congruenzen (13.), (13'.), u. s. w. gemäss bestimmt werden wurde schon früher erörtert.

Besitzt daher Θ_{1a} weniger Primfactoren als Θ, so ist nach Voraussetzung der Satz $\mathfrak{A}$ für die Gleichung (II''.) gültig. Dies ist aber der Fall, ausgenommen, wenn $\Theta_2 = 1$, $\Theta_{10} = 1$ ist. Nun ist zu bemerken, dass, wenn der Primfactor θ_1 von Θ_1 Grundfactor des Geschlechts G ist, es freisteht, θ_1 in Θ_{10} oder in Θ_{1a} aufzunehmen, weil alsdann für θ_1 die Bedingungen (A.) und (A'.) gleichbedeutend sind. Man kann also die Anzahl der Primfactoren in Θ_{1a} immer kleiner als diejenige in Θ_1 machen, wenn Grundfactoren in Θ_1 überhaupt vorhanden sind. Ist dies jedoch nicht der Fall, so kommt auf die Wahl von ε nichts an, weil dann die Bedingung (A.) oder (A'.) bei jedem ε für jeden Primfactor von Θ_1 sich erfüllen lässt, weshalb man $\Omega_{1c}\Omega_{2c}^2 = \varDelta_{10}\varDelta_{20}^2 = 1$ annehmen kann, so dass $\Omega_{1b}\Omega_{2b}^2 = \Omega$, $\varDelta_{1a}\varDelta_{2a}^2 = \varDelta$ wird und F_2 die Invarianten Θ_1, $\Omega\varDelta\Theta_1$ hat ($\Theta_2 = \Theta_{10} = 1$).

Es fragt sich daher (wenn man $\Omega\varDelta$ kurz wieder mit $\varDelta$ bezeichnet), ob der Satz $\mathfrak{A}$ richtig sei für Formen f_1 der Invarianten Θ_1, $\varDelta\Theta_1$. Um dies zu entscheiden, kann man sich f_1 wieder aus einer Form f der Invarianten 1, $\varDelta\Theta_1$ durch eine Substitution der Determinante Θ_1 entstanden denken. Eine solche Form f lässt sich aber nach Art. 33 in $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & 0, & 0 \end{pmatrix}$, $a = \pm 1$, transformirt voraussetzen. Dann wird

$$F = \begin{pmatrix} a\varDelta\Theta_1, & -aa'', & -aa' \\ ab, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

und die Gleichung (II''.) lautet jetzt, wenn $a'' = \varDelta\Theta a_1''$ gesetzt und $\varDelta_{10}\varDelta_{20}^2 = 1$ angenommen wird:

$$\varDelta\Theta_1 p_1^2 - \sigma = aq^2 - aa_1''q'^2 - aa'\varDelta\Theta_1 q_1''^2 + 2abq'q_1''.$$

Hier ist nur der Fall zu betrachten, in welchem $\Theta_1 = \Theta_{1a}$ ist und keine Grundfactoren vorhanden sind. Bezeichnet Θ_1'' wieder das Product derjenigen Primfactoren von Θ_1, welche in $\alpha_1\gamma_2 + \gamma_1\alpha_2$ aufgehen und für welche $a'a_0''\varepsilon_0 R\Theta_1''$ (d. h. $\sigma a'a_1''R\Theta_1''$) ist, so kann $q' \equiv 0 \pmod{\Theta_1''}$ sein und wenn man setzt:

$$\Theta_1 = \Theta_1'\Theta_1'', \quad q' = \Theta_1''q_1',$$

so geht die vorige Gleichung über in

$$q^2 + \sigma a = \Theta_1''(a\varDelta\Theta_1'p_1^2 + a_1''\Theta_1''q_1'^2 + a'\varDelta\Theta_1'q_1''^2 - 2bq_1'q_1'') = \Theta_1''F_1(p_1, q_1', q_1''),$$

wo F_1 eine eigentlich primitive indefinite Form der theilerfremden Invarianten $\Theta_1'\Delta$, Θ_1'' ist. Es muss also zunächst $-\sigma a R \Theta_1''$ sein, welche Bedingung mit der Voraussetzung $\sigma a' a_1'' R \Theta_1''$ vermöge der Congruenz $a' a_1'' \equiv -a \pmod{\Theta_1}$ identisch ist. Sodann muss q der Congruenz (15.) oder der ersten Congruenz (14'.) des Art. 14 genügen, was zur Bedingung (A'.) führt, die der Voraussetzung nach erfüllt ist und mit Rücksicht auf eben jene Congruenz mit der einen Bedingung der Darstellbarkeit $(q^2+\sigma a) a_1'' R \Theta_1'$ übereinstimmt. Die übrig bleibende Bedingung $(q^2+\sigma a) a_1'' R \Delta$ lässt sich offenbar immer erfüllen, ausgenommen für den Primfactor 3, sofern er in Δ vorkommt und zugleich $\sigma a \equiv -a_1'' \equiv 2 \pmod{3}$ ist, in welchem Falle wie in Art. 11 zu verfahren, nämlich $q \equiv \pm 1$, $q_1' \equiv 0 \pmod{3}$ zu setzen ist.

Hiermit ist der geforderte Nachweis geliefert.

Preisaufgabe der Fürstlich *Jablonowski*schen Gesellschaft zu Leipzig für das Jahr 1898.

Da die von ***Poisson, Green, Gauss, Dirichlet*** u. A. gegebene Theorie der dem ***Newton***schen Gesetze entsprechenden Kräfte einen der wichtigsten Theile der ganzen mathematischen Physik repräsentirt, andererseits aber die absolute Gültigkeit des ***Newton***schen Gesetzes (namentlich für sehr kleine und sehr grosse Entfernungen) mancherlei Bedenken ausgesetzt ist, so liegt der Gedanke nahe, die Theorie der Fernwirkungen in grösserer Allgemeinheit zu entwickeln und dabei, neben dem *Newton*schen, auch andere Gesetze der Fernwirkung in Betracht zu ziehen.

Ein solcher Versuch ist schon im Jahre 1832 von ***Green*** gemacht worden in seinen Mathematical Investigations concerning the Laws of the Equilibrium of Fluids analogous to the Electric Fluid*). Statt der *Newton*schen Kräfte vom Gesetze $\frac{1}{r^2}$ werden dort ganz allgemein Kräfte vom Gesetz $\frac{1}{r^n}$ in Betracht gezogen. Doch zeigen sich in jener ebenso wichtigen wie scharfsinnigen Abhandlung mancherlei Lücken und Unklarheiten, auf welche ***Green*** zum Theil schon selbst aufmerksam gemacht hat. Auch sind daselbst gewisse Aufgaben (wie z. B. die Aufgabe der elektrischen Vertheilung in einem Ellipsoid oder in einer Kreisscheibe) nur ganz beiläufig besprochen worden. Demgemäss wünscht die Gesellschaft

> eine wirkliche Lösung dieser von ***Green*** in seiner Abhandlung nur angedeuteten Aufgaben, so wie auch die Ausfüllung und Aufklärung der in der genannten Schrift vorhandenen Lücken und Dunkelheiten.

Preis 1000 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besonderen Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich

---

*) Transactions of the Cambridge Philos. Society 1833, wieder abgedruckt in den Mathematical Papers of *G. Green*, p. 117—183.

geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Umschlage begleitet sein, welcher auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Jede Bewerbungsschrift muss auf dem Titelblatte die Angabe einer Adresse enthalten, an welche die Arbeit für den Fall, dass sie nicht preiswürdig befunden wird, zurückzusenden ist. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den Sekretär der Gesellschaft (für das Jahr 1895 Geh. Bergrath Professor Dr. *F. Zirkel*, Thalstrasse Nr. 33) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

Zur simultanen Transformation quadratischer Differentialformen.

(Von Herrn *J. Knoblauch.*)

I.

Wer jemals flächentheoretische Untersuchungen angestellt hat, kennt die Weitläufigkeiten, in welche man geräth, sobald man über das Gebiet der gewöhnlichen Krümmungstheorie hinausgeht. Sie bestehen hauptsächlich darin, dass auch bei der Herleitung solcher Ergebnisse, welche ihrer Natur nach einen invarianten Charakter tragen, d. h. von der Wahl der krummlinigen Coordinaten unabhängig sein müssen, Ausdrücke sich einmischen, die diesen Charakter nicht aufweisen und von denen sich auch nicht von vornherein übersehen lässt, in welcher Weise sie sich schliesslich zu Invarianten gruppiren werden. Wenn es sich um Untersuchungen handelt, welche nur an *eine* der beiden in der Flächentheorie auftretenden quadratischen Differentialformen, das Quadrat des Linienelements, anknüpfen, so wird diesem Mangel durch Einführung der von mir mit Φ bezeichneten Covariante (vgl. dieses Journal Bd. 111, S. 282) und der aus ihr nach dem *Christoffel*schen Verfahren abzuleitenden Formen so weit abgeholfen, wie es der Natur der Sache nach möglich ist. Diese Covariante dürfte sich Jedem dargeboten haben, welcher sich mit Untersuchungen der in Rede stehenden Art beschäftigt hat; allein das Verdienst, die mit einer quadratischen Differentialform beliebig vieler Variablen zusammenhängenden „covarianten und contravarianten Derivationen" in einer Reihe von Abhandlungen ausführlich erörtert zu haben, gebührt vor allem *G. Ricci.**) Es erscheint merkwürdig, dass die zweite für die Flächentheorie fundamentale quadratische Differentialform, das Product der Normalkrümmung mit dem Quadrat des Linienelements, hierbei fast gänzlich ausser Betracht geblieben, und dass nament-

*) Vgl. die Anmerkung am Schlusse dieser Abhandlung.

lich die so vielfach behandelte simultane Transformation zweier quadratischen Formen in Quadratsummen linearer Formen, wenigstens für nicht specialisirte Variable in der Theorie der Differentialformen immer nur gestreift worden ist. Jedenfalls findet dieser Umstand darin seine Erklärung, dass die meisten Aufgaben, welche sich die Flächentheorie in den letzten Jahrzehnten gestellt hat, an die Theorie der Abwickelung sich angeschlossen haben. Die vorliegende Note hat lediglich den Zweck, in der angegebenen Hinsicht eine frühere Arbeit (dieses Journal Bd. 111, S. 329) zu ergänzen und die Grundlage der daselbst entwickelten Formeln von einem allgemeineren Gesichtspunkte aus zu beleuchten. Während dort, den eingangs gemachten Bemerkungen entsprechend, eine möglichst übersichtliche Darstellung der verschiedenen Differentialparameter angestrebt wurde, bildet hier, wenn man will, umgekehrt die Darstellung der zu den Grundformen A, B gehörigen Differentialparameter erster Ordnung in der a. a. O. S. 338 (Gleichungen (3.) und (4.) für $\psi=\varphi$) angegebenen Gestalt den Ausgangspunkt.

Die Ergebnisse einer solchen simultanen Betrachtung zweier quadratischen Differentialformen sind, auch abgesehen von ihrer geometrischen Bedeutung im binären Gebiete, von wesentlich anderer Form als die, welche unter Zugrundelegung einer einzigen Form erhalten werden. Im letzteren Falle lässt sich nämlich aus den Coefficienten der Form und den ersten Ableitungen einer willkürlichen Function der n Veränderlichen nur *ein* Ausdruck, der Differentialparameter erster Ordnung, bilden, welchem die Covarianteneigenschaft zukommt; im ersteren Falle dagegen existiren deren n, sodass alle Differentiationen durch covariante Operationen vertreten werden können.*)

Durch die Coefficienten der bei der simultanen Transformation von A und B auftretenden linearen Formen und ihre Ableitungen lassen sich namentlich die geodätischen Krümmungen der Krümmungslinien in sehr einfacher Weise ausdrücken. Um die analytische Bedeutung der Einführung dieser Coefficienten zu erkennen, hat man sich zu erinnern, dass die beiden „Invarianten zweiter Ordnung" der Fläche, nämlich die Hauptkrümmungen, durch eine quadratische Gleichung bestimmt werden, deren Coefficienten aus den Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung rational zusammengesetzt sind. Dabei sind die Fundamentalgrössen erster Ordnung, die Coef-

*) Vgl. die Anmerkung am Schlusse dieser Abhandlung.

ficienten der Differentialform A, ganze Functionen der ersten Ableitungen der Cartesischen nach den krummlinigen Coordinaten, die Grössen zweiter Ordnung ebensolche Functionen der ersten und zweiten Ableitungen, dividirt durch die Quadratwurzel aus der Determinante von A. Die Adjunction der Quadratwurzel aus der Discriminante jener quadratischen Gleichung gestattet, ihre Wurzeln von einander zu trennen. Es kommt nun, wie leicht zu sehen (§ IV), die Einführung der Grössenverbindungen, welche bei der simultanen Transformation auftreten, auf die Erweiterung des Rationalitätsbereichs durch Hinzunahme einer ferneren Quadratwurzel hinaus.

II.

Man kann die Ergebnisse der Theorie der linearen Transformationen zu einem grossen Theil in sehr einfacher Form aussprechen, wenn man die Begriffe der Cogredienz und der Contragredienz von Variablensystemen in etwas allgemeinerer Bedeutung anwendet, als es gewöhnlich zu geschehen pflegt. Zwei Grössensysteme $\xi_1, \ldots, \xi_n$; $\xi'_1, \ldots, \xi'_n$ seien durch die Gleichungen einer homogenen linearen Transformation

$$(1.) \qquad \xi'_\lambda = \sum_{i=1}^{n} \xi_i s_{\lambda i} \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

verbunden, deren Determinante

$$(2.) \qquad |s_{\lambda i}| = s \quad (\lambda, i = 1, \ldots, n)$$

gesetzt werden soll. Die $\binom{n}{m}$ Combinationen der Zahlen $1, \ldots, n$ zu je m sollen in eine bestimmte Reihenfolge gebracht, also den Zahlen

$$1, \; 2, \; \ldots, \; \binom{n}{m}$$

eindeutig zugeordnet sein. Wenn dann die Combination $(i_1, \ldots, i_m)$ in dieser Reihe an $i$ter, die Combination $(k_1, \ldots, k_m)$ an $k$ter Stelle steht, so soll die Determinante $m$ten Grades, welche die den Zeilen $i_1, \ldots, i_m$ und den Colonnen $k_1, \ldots, k_m$ gemeinsamen Elemente von s enthält, mit $s_{ik}^{(m)}$ bezeichnet werden, sodass

$$(3.) \qquad s_{ik}^{(m)} = |s_{\alpha\beta}| \quad \binom{\alpha = i_1, \ldots, i_m}{\beta = k_1, \ldots, k_m}$$

zu setzen ist. Ein System von $\binom{n}{m}$ Grössen, $\xi_1^{(m)}, \ldots, \xi_{\binom{n}{m}}^{(m)}$, soll nun dem Grössensystem $\xi_1, \ldots, \xi_n$ in der $m$ten Ordnung cogredient heissen, wenn

zwischen jenen Grössen und ihren transformirten die Gleichungen

$$(4.)\qquad \xi_\lambda'^{(m)} = \sum_{i=1}^{\binom{n}{m}} \xi_i^{(m)} s_{\lambda i}^{(m)} \qquad \left(\lambda = 1, \dots, \binom{n}{m}\right)$$

stattfinden; dagegen soll das System $x_1^{(m)}, \dots, x_{\binom{n}{m}}^{(m)}$ als den Grössen $\xi_1, \dots, \xi_n$ in der $m$ten Ordnung contragredient bezeichnet werden, wenn es mit seinem transformirten durch die Relationen

$$(5.)\qquad x_i^{(m)} = \sum_{\lambda=1}^{\binom{n}{m}} x_\lambda'^{(m)} s_{\lambda i}^{(m)} \qquad \left(i = 1, \dots, \binom{n}{m}\right)$$

verbunden ist.

Bestehen ferner zwischen einem „System γ" und seinem transformirten die Gleichungen

$$(6.)\qquad \gamma'_{\lambda_1 \dots \lambda_r} = \sum_{\left(i_1, \dots, i_r = 1, \dots, \binom{n}{m}\right)} \gamma_{i_1 \dots i_r} s_{\lambda_1 i_1}^{(m)} \dots s_{\lambda_r i_r}^{(m)}, \qquad \left(\lambda_1, \dots, \lambda_r = 1, \dots, \binom{n}{m}\right)$$

und zwischen einem System g und seinem transformirten die folgenden:

$$(7.)\qquad g_{i_1 \dots i_r} = \sum_{\left(\lambda_1, \dots, \lambda_r = 1, \dots, \binom{n}{m}\right)} g'_{\lambda_1 \dots \lambda_r} s_{\lambda_1 i_1}^{(m)} \dots s_{\lambda_r i_r}^{(m)}, \qquad \left(i_1, \dots, i_r = 1, \dots, \binom{n}{m}\right)$$

so soll das System γ dem System ξ r-fach in der $m$ten Ordnung cogredient, das System g diesem System r-fach in der $m$ten Ordnung contragredient heissen. Die Grössen γ und g, welchen eigentlich noch ein Index m beizufügen wäre, können allgemein als einander contragredient bezeichnet werden.

Mit Hülfe dieser Benennungen kann man z. B. den Inhalt der Transformationsgleichungen für die Coefficienten einer r-fach linearen Form, unter Voraussetzung der Transformation (1.), dahin aussprechen, dass diese Coefficienten den Grössen ξ r-fach (in der ersten Ordnung) contragredient sind. — Die Annahmen $m = 1$, $r = 1$ ergeben die Cogredienz und die Contragredienz im gewöhnlichen Sinne des Wortes; für $m = 1$ soll die Angabe der Ordnung und die Setzung des Index m unterbleiben.

Die zwischen zwei contragredienten Systemen von je $\binom{n}{m}^r$ Grössen und ihren transformirten geltende Formel

$$(8.)\qquad \sum_{\left(i_1, \dots, i_r = 1, \dots, \binom{n}{m}\right)} g_{i_1 \dots i_r} \gamma_{i_1 \dots i_r} = \sum_{\left(\lambda_1, \dots, \lambda_r = 1, \dots, \binom{n}{m}\right)} g'_{\lambda_1 \dots \lambda_r} \gamma'_{\lambda_1 \dots \lambda_r},$$

welche leicht verallgemeinert werden könnte, ist die Quelle einer grossen

Anzahl invariantentheoretischer Resultate. Z. B. entspringt aus ihr die Theorie der simultanen Invarianten zweier quadratischen Formen, für Differentialformen speciell die Theorie der Differentialparameter.

Es seien jetzt, unter der Voraussetzung $m = 1$, n Grössensysteme

$$p_{\nu i} \qquad \binom{i=1,\ldots,n}{\nu=1,\ldots,n}$$

angenommen, deren jedes dem System ξ contragredient ist, und welche daher von vornherein als Systeme der Coefficienten von n, in den Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ linearen Formen betrachtet werden können. D. h. es mögen die Gleichungen

$$(9.) \qquad p_{\nu i} = \sum_{\lambda=1}^{n} p'_{\nu\lambda} s_{\lambda i} \qquad (i=1,\ldots,n)$$

für $\nu = 1, \ldots, n$ bestehen. Zwischen den Determinanten

$$\underset{(\nu,\, i=1,\ldots,n)}{|p_{\nu i}| = p,} \qquad \underset{(\nu,\, \lambda=1,\ldots,n)}{|p'_{\nu\lambda}| = p'}$$

findet die Gleichung

$$(10.) \qquad p = p's$$

statt. Die Einführung der Unterdeterminanten $m$ten Grades von p und p', welche denen von s (Gl. (3.)) entsprechend bezeichnet werden sollen, giebt Veranlassung zur Entstehung von $\binom{n}{m}$ Systemen, welche dem System ξ in der $m$ten Ordnung contragredient sind. Denn es gelten die Formeln

$$(11.) \qquad p_{\alpha i}^{(m)} = \sum_{\lambda=1}^{\binom{n}{m}} p'^{(m)}_{\alpha\lambda} s^{(m)}_{\lambda i} \qquad \left(i=1,\ldots,\binom{n}{m}\right)$$

für $\alpha = 1, \ldots, \binom{n}{m}$.

In diesen werde nun speciell $m = n-1$ genommen, und die entstehende Gleichung in der Gestalt

$$(12.) \qquad (-1)^{\nu+i} p_{\nu i}^{(n-1)} = \sum_{\lambda=1}^{n} (-1)^{\nu+\lambda} p'^{(n-1)}_{\nu\lambda} . (-1)^{\lambda+i} s^{(n-1)}_{\lambda i} \qquad \binom{i=1,\ldots,n}{\nu=1,\ldots,n}$$

geschrieben. Ist die Anordnung der Zahlen $1, \ldots, n$ zu je $n-1$ so getroffen, dass die Combination $(1, \ldots, \alpha-1, \alpha+1, \ldots, n)$ an αter Stelle steht, so sind die in (12.) auftretenden Determinanten die den Elementen

$$p_{\nu i}, \quad p'_{\nu\lambda}, \quad s_{\lambda i}$$

in den Schematen von

$$p, \quad p', \quad s$$

adjungirten Unterdeterminanten. Es werde noch

$$(13.)\quad \begin{cases} (-1)^{\alpha+\beta}\dfrac{s_{\alpha\beta}^{(n-1)}}{s} = \sigma_{\alpha\beta}, \\ (-1)^{\alpha+\beta}\dfrac{p_{\alpha\beta}^{(n-1)}}{p} = \pi_{\alpha\beta} \end{cases} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

gesetzt und die analoge Bezeichnung auch auf die aus p' entstehenden Determinanten angewendet. Dann folgt aus (12.) durch Division mit (10.):

$$(14.)\quad \pi_{\nu i} = \sum_{\lambda=1}^{n} \pi'_{\nu\lambda}\sigma_{\lambda i} \qquad \binom{i = 1, \ldots, n}{\nu = 1, \ldots, n}$$

oder

$$(15.)\quad \pi'_{\nu\lambda} = \sum_{i=1}^{n} \pi_{\nu i}s_{\lambda i}; \qquad \binom{\lambda = 1, \ldots, n}{\nu = 1, \ldots, n}$$

d. h. die durch die Gleichung (12.) repräsentirten n Contragredienzen $(n-1)$-ter Ordnung führen nach Division mit $p = p's$ auf ebensoviele Cogredienzen erster Ordnung.

Fügt man den n contragredienten Systemen $p_{\nu i}$ ein $(n+1)$-tes hinzu, welches einfach mit p_i $(i = 1, \ldots, n)$ bezeichnet werden soll, setzt also

$$(16.)\quad p_i = \sum_{\lambda=1}^{n} p'_\lambda s_{\lambda i}, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

so folgt aus der Formel (8.):

$$(17.)\quad \sum_{i=1}^{n} p_i\pi_{\nu i} = \sum_{\lambda=1}^{n} p'_\lambda \pi'_{\nu\lambda}. \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

Es bedarf kaum der Erinnerung, dass, von der allgemeinen Theorie der cogredienten und contragredienten Systeme abgesehen, die Herleitung dieser Relationen nichts weiter erfordert als die Gleichung (10.) und die n analogen, welche aus ihr hervorgehen, wenn man in der Determinante p die Elemente

$$p_{\nu 1}, \ \ldots, \ p_{\nu n}$$

der Reihe nach durch

$$p_1, \ \ldots, \ p_n$$

ersetzt.

III.

Die simultane Ueberführung zweier quadratischen Formen

$$(1.)\quad \begin{cases} \mathsf{A} = \sum_{i,k} a_{ik}\xi_i\xi_k \\ \mathsf{B} = \sum_{i,k} b_{ik}\xi_i\xi_k \end{cases}$$

in algebraische Summen von je n Quadraten reducirt die Theorie dieser Formen, unter Adjunction der Wurzeln einer Gleichung $n$ten Grades, auf die eines Systems linearer Formen, deren Coefficienten durch quadratische Gleichungen bestimmt werden. Sie veranlasst daher die Einführung von n solchen Grössensystemen $p_{\nu i}$ $(\nu = 1, \dots, n)$, wie sie eben benutzt worden sind. Die Determinanten der (reell angenommenen) Coefficienten von A und B,

$$\underset{(i,\,k=1,\,\dots,\,n)}{|a_{ik}| = a}, \qquad \underset{(i,\,k=1,\,\dots,\,n)}{|b_{ik}| = b}$$

seien von Null verschieden, die Form A beständig positiv; dann kann man setzen

$$\text{(2.)} \qquad \begin{cases} \mathsf{A} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{P}_\nu^2, \\ \mathsf{B} = \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu \mathfrak{P}_\nu^2, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$ lineare Formen, $r_1, \dots, r_n$ die reellen, von Null verschiedenen und als ungleich vorausgesetzten Wurzeln der Gleichung

$$\text{(3.)} \qquad f(r) \equiv |ra_{ik} - b_{ik}| = 0 \qquad (i, k = 1, \dots, n)$$

bedeuten. Bei Anwendung der im § II eingeführten Bezeichnungen würde sich beispielsweise der elementare Beweis für die Covarianz der Formen

$$\text{(4.)} \qquad \mathfrak{P}_\nu = \sum_{i=1}^{n} p_{\nu i} \xi_i, \qquad (\nu = 1, \dots, n)$$

wenn von den *Jacobi*schen Ausdrücken für $\mathfrak{P}_1^2, \dots, \mathfrak{P}_n^2$ ausgegangen wird, folgendermassen darstellen. Bezeichnet

$$f(r)_{ik} \qquad (i, k = 1, \dots, n)$$

diejenige Unterdeterminante erster Ordnung von $f(r)$, welche dem Element $ra_{ik} - b_{ik}$ adjungirt ist, A_i die halbe partielle Ableitung von A nach ξ_i, so ist

$$\text{(5.)} \qquad \mathfrak{P}_\nu^2 = \sum_{i,k} \frac{f(r_\nu)_{ik}}{f'(r_\nu)} \mathsf{A}_i \mathsf{A}_k.$$

Bei einer linearen Transformation von A und B wird

$$\text{(6.)} \qquad a = a's^2,$$

und die Unterdeterminanten $m$ten Grades von a werden den Variablen ξ zweifach in der $m$ten Ordnung contragredient:

$$\text{(7.)} \qquad a_{ik}^{(m)} = \underset{\left(\lambda,\,\mu=1,\,\dots,\,\binom{n}{m}\right)}{\Sigma a'^{(m)}_{\lambda\mu} s_{\lambda i}^{(m)} s_{\mu k}^{(m)}}. \qquad \left(i, k = 1, \dots, \binom{n}{m}\right)$$

Wendet man dies für $m = n-1$ auf die Unterdeterminanten von $f(r)$ an, in

welchen r irgend eine Constante oder simultane Invariante der quadratischen Formen A, B bezeichnet, und dividirt die entstehende Gleichung durch (6.), so entsteht aus der zweifachen Contragredienz $(n-1)$-ter Ordnung die zweifache Cogredienz erster Ordnung

$$(8.)\qquad \frac{f(r)_{ik}}{a} = \sum_{(\lambda,\,\mu=1,\,\dots,\,n)} \frac{f(r)'_{\lambda\mu}}{a'}\sigma_{\lambda i}\sigma_{\mu k}. \qquad (i,\,k=1,\,\dots,\,n)$$

Im Besonderen kann man $r = r_\nu$ setzen und erhält dann durch Division mit der Invariante

$$(r_\nu - r_1)\dots(r_\nu - r_{\nu-1})(r_\nu - r_{\nu+1})\dots(r_\nu - r_n) = \frac{f'(r_\nu)}{a}$$

und Auflösung:

$$(9.)\qquad \frac{f(r_\nu)'_{\lambda\mu}}{f'(r_\nu)} = \sum_{i,k} \frac{f(r_\nu)_{ik}}{f'(r_\nu)} s_{\lambda i} s_{\mu k}. \qquad \left(\begin{matrix}\lambda,\,\mu=1,\,\dots,\,n\\ \nu=1,\,\dots,\,n\end{matrix}\right)$$

Nun sind ferner die partiellen Ableitungen von A nach den Variablen diesen contragredient, ihre Producte mithin den Veränderlichen zweifach contragredient; hieraus folgt durch Anwendung der Formel II (8.):

$$\mathfrak{P}_\nu^2 = \mathfrak{P}'^2_\nu. \qquad (\nu=1,\,\dots,\,n)$$

Bei passender gegenseitiger Zuordnung der in den Coefficienten $p_{\nu i}$ und $p'_{\nu\lambda}$ vorkommenden Quadratwurzelwerthe wird dann auch

$$(10.)\qquad \mathfrak{P}_\nu = \mathfrak{P}'_\nu, \qquad (\nu=1,\,\dots,\,n)$$

d. h. die Coefficienten genügen den Transformationsgleichungen II (9.).

Es seien nun speciell die beiden gegebenen quadratischen Formen Differentialformen, d. h. es werde, für $u_1, \dots, u_n$ als unabhängige Variable,

$$(11.)\qquad \xi_i = du_i, \qquad \xi'_\lambda = du'_\lambda,$$

$$(12.)\qquad s_{\lambda i} = \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}, \qquad \sigma_{\lambda i} = \frac{\partial u_i}{\partial u'_\lambda}$$

gesetzt. Die Coefficienten a_{ik}, b_{ik} der beiden Formen und die aus ihnen zusammengesetzten Grössen $p_{\nu i}$ sind Functionen von $u_1, \dots, u_n$, die transformirten Grössen Functionen von $u'_1, \dots, u'_n$. Die im § II mit $\mathfrak{P}$ bezeichnete lineare Form sei hier das Differential einer willkürlichen Function $\varphi(u_1, \dots, u_n)$, welche bei der Transformation zu den Variablen $u'_1, \dots, u'_n$ in $\overline{\varphi}(u'_1, \dots, u'_n)$ übergehen möge. Die Formel II (17.) liefert dann:

$$(13.)\qquad \sum_{i=1}^{n} \pi_{\nu i}\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \sum_{\lambda=1}^{n} \pi'_{\nu\lambda}\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u'_\lambda}, \qquad (\nu=1,\,\dots,\,n)$$

eine Gleichung, welche für

$$(14.)\qquad \sum_{i=1}^{n} \pi_{\nu i} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \Theta_\nu \varphi \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

in der Form

$$(15.)\qquad \Theta_\nu \varphi = \Theta'_\nu \bar{\varphi} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

geschrieben werden kann. Sie besagt, dass unter der Annahme der gleichzeitigen Transformation zweier quadratischen Differentialformen die n Differentiationen einer willkürlichen Function nach den Variablen durch ebensoviele covariante Operationen ersetzt werden können.

Von den mannigfachen Folgerungen, welche hieraus, auch für die Theorie der Differentialparameter, gezogen werden können, soll nur eine hervorgehoben werden. Aus der Voraussetzung, dass bei der Bildung der höheren Ableitungen von φ die Reihenfolge der Differentiationen gleichgültig sei, ergiebt sich für

$$(16.)\qquad \Theta_k \Theta_i \varphi = \Theta_{ik} \varphi$$

die Gleichung

$$(17.)\qquad \Theta_{ki} \varphi - \Theta_{ik} \varphi = \sum_{\nu=1}^{n} p_{ik,\nu} \Theta_\nu \varphi, \qquad (i, k = 1, \ldots, n)$$

in welcher

$$(18.)\qquad p_{ik,\nu} = \sum_{\lambda=1}^{n} p_{\nu\lambda} \sum_{\mu=1}^{n} \left(\pi_{i\mu} \frac{\partial \pi_{k\lambda}}{\partial u_\mu} - \pi_{k\mu} \frac{\partial \pi_{i\lambda}}{\partial u_\mu} \right)$$

gesetzt ist. Sie lässt den Schluss auf die Invarianten-Eigenschaft der Grössen $p_{ik,\nu}$ zu, welche auch wieder leicht auf directem Wege nachgewiesen werden kann. Aus den Gleichungen II (14.) ergeben sich nämlich unmittelbar die n Grössen

$$\sum_{\mu=1}^{n} \left(\pi_{i\mu} \frac{\partial \pi_{k\lambda}}{\partial u_\mu} - \pi_{k\mu} \frac{\partial \pi_{i\lambda}}{\partial u_\mu} \right) \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

für jedes Werthepaar (i, k) als den Grössen ξ cogredient; woraus mit Hinzunahme der Transformationsgleichungen II (9.) auf Grund der Formel II (8.) die Relationen

$$p_{ik,\nu} = p'_{ik,\nu} \qquad (i, k, \nu = 1, \ldots, n)$$

hervorgehen.

Die Anzahl der in Rede stehenden Invarianten ist, wenn je zwei bloss durch das Vorzeichen unterschiedene Grössen nur einmal gezählt werden, gleich $\frac{n^2(n-1)}{2}$. Mit Hülfe der Grundformeln der Determinanten-

theorie lassen sie sich in die Gestalt

$$(19.)\qquad p_{ik,\nu} = \sum_{(\lambda,\,\mu=1,\,\ldots,\,n)} (\pi_{i\lambda}\pi_{k\mu} - \pi_{k\lambda}\pi_{i\mu}) \frac{\partial p_{\nu\lambda}}{\partial u_\mu}$$

setzen, wo noch für die Determinanten zweiten Grades der Grössen π Determinanten $(n-2)$-ten Grades der Grössen p eingeführt werden könnten.

IV.

In dem für die Flächentheorie wichtigen Falle $n=2$ bieten sich bemerkenswerthe Vereinfachungen dar. Zunächst können die Grössen $\mathfrak{P}_\nu^2$, deren Anzahl hier gleich der der gegebenen quadratischen Differentialformen ist, unmittelbar durch diese dargestellt werden, ohne dass es des Durchganges durch die *Jacobi*schen Ausdrücke bedarf. Denn aus den Gleichungen

$$(1.)\qquad \begin{cases} \mathsf{A} = \mathfrak{P}_1^2 + \mathfrak{P}_2^2, \\ \mathsf{B} = r_1\mathfrak{P}_1^2 + r_2\mathfrak{P}_2^2 \end{cases}$$

folgt

$$(2.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{P}_1^2 = \dfrac{\mathsf{B} - r_2\mathsf{A}}{r_1 - r_2}, \\[2mm] \mathfrak{P}_2^2 = \dfrac{r_1\mathsf{A} - \mathsf{B}}{r_1 - r_2}. \end{cases}$$

Zur präcisen Definition der Ausdrücke $\Theta_1\varphi$, $\Theta_2\varphi$ ist eine Reihe von Voraussetzungen erforderlich, welche zum Theil im Vorhergehenden bereits angegeben sind. Sie beziehen sich der Mehrzahl nach auf eine Begrenzung des Bereiches der krummlinigen Coordinaten. Die unabhängigen Variablen, durch welche die Fläche ursprünglich dargestellt wird, seien u, v, die transformirten u', v', und zwar sei die Bezeichnung so gewählt, dass die Functionaldeterminante

$$(3.)\qquad \Delta \equiv \frac{\partial(u',v')}{\partial(u,v)} > 0$$

ist; dann gilt die Gleichung

$$(4.)\qquad \sqrt{a} = \Delta . \sqrt{a'}.$$

Hierbei sind unter $\sqrt{a}$ und $\sqrt{a'}$ die positiven Werthe der Quadratwurzeln aus den Determinanten von A und A' verstanden; dasselbe soll, wo nichts anderes bemerkt wird, von den sonst noch vorkommenden Quadratwurzeln gelten. Von den Hauptkrümmungen r_1, r_2 sei — unter Ausschluss der Kreispunkte — die erste die grössere:

$$(5.)\qquad r_1 > r_2.$$

Die Parameter der Krümmungslinien der Fläche sollen mit p, q derart bezeichnet sein, dass zu $q = \text{const.}$ die Hauptkrümmung r_1 gehört; die auf p, q bezüglichen Werthe der Fundamentalgrössen und der aus ihnen zusammengesetzten Ausdrücke werden durch Hinzufügung eines Sterns charakterisirt. Selbstverständlich gilt hier ebenfalls die über das Zeichen der Functionaldeterminante getroffene Festsetzung, in der Form

$$\frac{\partial(p,q)}{\partial(u,v)} > 0.$$

Die Werthe der Coefficienten in den linearen Differentialformen

$$(6.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{P}_1 = p_{11}du+p_{12}dv, \\ \mathfrak{P}_2 = p_{21}du+p_{22}dv \end{cases}$$

ergeben sich durch Substitution der Ausdrücke von A und B in die Gleichungen (2.). Man erhält zunächst

$$(7.)\qquad \mathfrak{P}_1 = \sqrt{\frac{b_{11}-a_{11}r_2}{r_1-r_2}}\,du+\sqrt{\frac{b_{22}-a_{22}r_2}{r_1-r_2}}\,dv$$

auf Grund der im § III mit $f(r) = 0$ bezeichneten Gleichung, deren Wurzeln die Invarianten r_1, r_2 sind. Dabei kann $\sqrt{r_1-r_2}$, wenn man diese Wurzelgrösse absondern will, als positiv vorausgesetzt werden; von den beiden anderen Wurzelwerthen bleibt der eine, etwa $\sqrt{b_{11}-a_{11}r_2}$, willkürlich, während der andere mit diesem durch die Gleichung

$$(8.)\qquad \sqrt{b_{11}-a_{11}r_2}\sqrt{b_{22}-a_{22}r_2} = b_{12}-a_{12}r_2$$

verbunden ist. Vermöge der Covarianz von $\mathfrak{P}_1$ besteht die Gleichung

$$p_{11}du+p_{12}dv = p^*_{11}dp+p^*_{12}dq$$

bei passender Bestimmung von p^*_{11}, oder, da

$$(9.)\qquad p^*_{11} = \sqrt{a^*_{11}},\quad p^*_{12} = 0$$

ist, bei passender Wahl von $\sqrt{a^*_{11}}$. Es empfiehlt sich, diesen Werth ein für allemal zu fixiren und der allgemeinen Bestimmung gemäss positiv zu setzen. Dann lässt sich also der Werth von $\sqrt{b_{11}-a_{11}r_2}$ und damit auch der von $\sqrt{b_{22}-a_{22}r_2}$ so wählen, dass für

$$(10.)\qquad p_{11} = \frac{\sqrt{b_{11}-a_{11}r_2}}{\sqrt{r_1-r_2}},\quad p_{12} = \frac{\sqrt{b_{22}-a_{22}r_2}}{\sqrt{r_1-r_2}}$$

die Gleichung

$$(11.)\qquad p_{11}du+p_{12}dv = \sqrt{a^*_{11}}\,dp$$

stattfindet.

Für die lineare Differentialform $\mathfrak{P}_2$ würde Entsprechendes gelten. Man erhält

$$(12.)\qquad \mathfrak{P}_2 = \frac{\sqrt{a_{11}r_1-b_{11}}}{\sqrt{r_1-r_2}}du+\frac{\sqrt{a_{22}r_1-b_{22}}}{\sqrt{r_1-r_2}}dv$$

und kann, solange nicht die Covarianz von $\mathfrak{P}_2$ ausdrücklich in Betracht gezogen wird, den einen Wurzelwerth, $\sqrt{a_{22}r_1-b_{22}}$, willkürlich lassen, während der zweite nach Annahme des ersten durch die Relation

$$(13.)\qquad \sqrt{a_{22}r_1-b_{22}}\sqrt{a_{11}r_1-b_{11}} = a_{12}r_1-b_{12}$$

fixirt wird.

Es lassen sich jedoch die Coefficienten von $\mathfrak{P}_2$ noch zu denen von $\mathfrak{P}_1$ in eindeutige Beziehung setzen. Aus den Gleichungen

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}'_1,$$
$$\mathsf{A} = \mathsf{A}'$$

folgt nämlich durch Bildung der Functionaldeterminante in Bezug auf die Differentiale und Division mit (4.) die Gleichung

$$(14.)\qquad D_a(\mathfrak{P}_1,\ \mathsf{A}) = D_a(\mathfrak{P}'_1,\ \mathsf{A}')$$

für

$$(15.)\qquad D_a(\mathfrak{P}_1,\ \mathsf{A}) = \frac{2}{\sqrt{a}}[(a_{12}p_{11}-a_{11}p_{12})du+(a_{22}p_{11}-a_{12}p_{12})dv];$$

und zwar gilt diese Covarianten-Gleichung bei passender Wahl entweder der in p_{11}, p_{12} oder der in p'_{11}, p'_{12} zunächst unbestimmt bleibenden Wurzelgrösse. Im besonderen ergiebt sich, wenn für u', v' die Parameter der Krümmungslinien genommen und von der Relation (11.) in Verbindung mit

$$\mathsf{A}^* = E^*dp^2+G^*dq^2$$

ausgegangen wird:

$$(16.)\qquad \frac{1}{\sqrt{a}}[(a_{12}p_{11}-a_{11}p_{12})du+(a_{22}p_{11}-a_{12}p_{12})dv] = \sqrt{a^*_{22}}\,dq,$$

wo $\sqrt{a^*_{22}}$ den positiven Werth der Quadratwurzel bezeichnet. Andererseits lehrt eine einfache Rechnung, dass

$$(17.)\qquad (\tfrac{1}{2}D_a(\mathfrak{P}_1,\ \mathsf{A}))^2 = \mathfrak{P}_2^2$$

ist. Demnach können die Coefficienten von $\mathfrak{P}_2$ durch den Ansatz

$$(18.)\qquad \frac{1}{\sqrt{a}}(a_{12}p_{11}-a_{11}p_{12}) = p_{21},\quad \frac{1}{\sqrt{a}}(a_{22}p_{11}-a_{12}p_{12}) = p_{22}$$

nicht nur eindeutig, sondern auch so bestimmt werden, dass die der Gleichung (11.) entsprechende:

$$(19.)\qquad p_{21}du+p_{22}dv = \sqrt{a'_{22}}\,dq$$

besteht.

Unter Voraussetzung der Definition von p_{21}, p_{22} durch die Gleichungen (18.), welche auch in der Gestalt

$$(18^a.)\qquad \frac{1}{\sqrt{a}}(-a_{12}p_{21}+a_{22}p_{22}) = p_{11},\quad \frac{1}{\sqrt{a}}(-a_{22}p_{21}+a_{12}p_{22}) = p_{12}$$

geschrieben werden können, gilt die Formel

$$(20.)\qquad p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21} = \sqrt{a}.$$

Diesen Gleichungen lassen sich andere an die Seite setzen, welche durch Zusammenstellung von $\mathfrak{P}_1$ und B zu einer Functionaldeterminante entstehen. Doch sollen sie ebensowenig wie die übrigen bei der Anwendung von $\Theta_1\varphi$ und $\Theta_2\varphi$ gebrauchten Formeln hier entwickelt werden.

Was nun diese Ausdrücke selbst betrifft, so kommt hier, wo man bei der Bestimmung der Determinanten π_{ik} auf die Grössen $p_{\lambda\mu}$ selbst zurückgeführt wird, bei deren Definition immer nur eine der Formen $\mathfrak{P}_\nu$ in Betracht, und es bedürfte zu ihrer Einführung lediglich der Bildung der Functionaldeterminante von $d\varphi$ einerseits und $\mathfrak{P}_1$ oder $\mathfrak{P}_2$ andererseits; wie ja überhaupt in der Formentheorie für $n=2$ die Bildung einer Functionaldeterminante, soweit sie nicht singuläre Ergebnisse liefert, häufig geeignet ist allgemeinere Operationen zu ersetzen. Man erhält

$$(21.)\qquad \begin{cases} \Theta_1\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\left(p_{22}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-p_{21}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right), \\ \Theta_2\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\left(-p_{12}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}+p_{11}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right). \end{cases}$$

Um zu den a. a. O. (S. 334 (8.)) angewandten Bezeichnungen überzugehen, hätte man zu setzen

$$(22.)\qquad \begin{cases} \dfrac{p_{22}}{\sqrt{a}} = \mu_1, & -\dfrac{p_{21}}{\sqrt{a}} = \nu_1, \\ -\dfrac{p_{12}}{\sqrt{a}} = \mu_2, & \dfrac{p_{11}}{\sqrt{a}} = \nu_2. \end{cases}$$

Die aus der Covarianz von $\Theta_1\varphi$, $\Theta_2\varphi$ in Verbindung mit den Gleichungen (9.) und

$$(23.)\qquad p'_{21} = 0,\quad p'_{22} = \sqrt{a'_{22}}$$

...enden Ausdrücke

$$\Theta_1\varphi = \frac{1}{\sqrt{a^{\bullet}_{11}}}\frac{\partial\varphi}{\partial p}, \quad \Theta_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{a^{\bullet}_{22}}}\frac{\partial\varphi}{\partial q} \tag{24.}$$

...hren, dass $\Theta_1\varphi$ gleich dem Quotienten ist, welcher sich ergiebt, wenn das ...ncrement der Function φ beim Fortgange längs der Krümmungslinie $q = \text{const.}$ im Sinne $dp > 0$ durch das Bogenelement dieser Curve dividirt wird; und entsprechend für $\Theta_2\varphi$ (a. a. O. S. 335).

V.

Die Anzahl der im § III mit $p_{ik,\nu}$ bezeichneten Invarianten reducirt sich für $n = 2$ auf zwei. Setzt man

$$p_{12,1} = g_1, \quad p_{21,2} = g_2, \tag{1.}$$

so ergiebt sich aus der Darstellung III (19.):

$$\begin{cases} g_1 = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\left(\dfrac{\partial p_{12}}{\partial u} - \dfrac{\partial p_{11}}{\partial v}\right), \\ g_2 = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\left(\dfrac{\partial p_{21}}{\partial v} - \dfrac{\partial p_{22}}{\partial u}\right). \end{cases} \tag{2.}$$

Die Invarianten stehen also hier in unmittelbarer Beziehung zu den Au... drücken, welche aus den Integrabilitäts-Bedingungen für die Formen ... entspringen; was, wie sofort ersichtlich, für $n > 2$ nicht der Fall ist. I... Invarianz zufolge wird

$$\begin{cases} g_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{a^{\bullet}_{11}a^{\bullet}_{22}}}\dfrac{\partial\sqrt{a^{\bullet}_{11}}}{\partial q}, \\ g_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{a^{\bullet}_{11}a^{\bullet}_{22}}}\dfrac{\partial\sqrt{a^{\bullet}_{22}}}{\partial p}; \end{cases} \tag{3.}$$

g_1, g_2 sind die Tangentialkrümmungen der Krümmungscurven $q =$ ... $p = \text{const.}$ Setzt man für eine beliebige lineare Differentialform $p_1du + \text{1}$...

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial p_2}{\partial u} - \frac{\partial p_1}{\partial v}\right) = J(\mathfrak{P}), \tag{4.}$$

so wird

$$g_1 = J(\mathfrak{P}_1), \quad g_2 = -J(\mathfrak{P}_2). \tag{5.}$$

Diese Ausdrücke gestatten z. B., um nur eine Anwendung zu er... Bedingung für die Isometrie der Krümmungslinien ohne we... schreiben.

Ueber das Vorzeichen der Tangential- oder geodätischen Krümmung, hinsichtlich dessen in den verschiedenen flächentheoretischen Arbeiten keine Uebereinstimmung besteht, sei noch eine Bemerkung gestattet. Man definirt gewöhnlich die Tangentialkrümmung als die Projection der ersten Krümmung der Curve auf die Tangentialebene der Fläche; und zwar mit positivem oder negativem Zeichen genommen, je nachdem die vom Curvenpunkte nach der Projection des Krümmungsmittelpunkts gehende Richtung mit der positiven oder negativen Richtung der in der Tangentialebene gelegenen Curvennormale zusammenfällt. Hat man nun ein Princip des Fortganges auf der Curve willkürlich festgesetzt und dadurch die positive Richtung der Tangente fixirt, so kann man die Richtung in der Tangentialebene, welche zur Bestimmung des Vorzeichens der Tangentialkrümmung erfordert wird, dadurch festlegen, dass man die positiven Richtungen der Tangente, der in Rede stehenden Normale und der Flächennormale (deren Richtung ein für allemal fixirt ist) in bestimmter Reihenfolge den positiven Richtungen der Axen x, y, z entsprechen lässt. Handelt es sich jetzt gleichzeitig um zwei auf einander senkrechte Curven, welche als Coordinatenlinien $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ betrachtet werden sollen, und wählt man das Fortgangsprincip für beide Curven entsprechend (z. B. im Sinne $du > 0$ für die erste, $dv > 0$ für die zweite Coordinatenlinie), so geht der Ausdruck von g_u aus dem von g_v durch Vertauschung von u mit v, a_{11} mit a_{22} und Umkehrung des Vorzeichens hervor. Dagegen ist die Zeichenänderung nicht erforderlich, wenn zunächst für eine beliebige Curve

$$\varphi(u, v) = \text{const.}$$

ein bestimmter, d. h. mit einem bestimmten Vorzeichen behafteter analytischer Ausdruck abgeleitet, und dieser dann für beliebige Curven zur Definition der geodätischen Krümmung verwendet wird. Man kann diesen Ausdruck (unter Benutzung der a. a. O. S. 282 eingeführten Bezeichnungen) z. B. in die Form

$$(6.)\qquad g_\varphi = -\frac{H_a(\Phi, d\varphi^2)}{(\Delta_a^1 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

setzen.

Die zweite Definitionsweise ist in mehrfacher Hinsicht der ersten vorzuziehen. — Für die Krümmungscurven im besonderen werden die Ausdrücke von g_1 und g_2 in der obigen Form erhalten, wenn man die positiven Richtungen ihrer Tangenten,

$$n_1 \equiv (X_1 Y_1 Z_1), \quad n_2 \equiv (X_2 Y_2 Z_2),$$

durch die Gleichungen

$$(7.)\qquad \begin{cases} X_1 = \Theta_1 x, & \dots \\ X_2 = \Theta_2 x, & \dots \end{cases}$$

definirt und dann n_2 und n_1 als positive Richtungen der in der Tangentialebene gelegenen Normalen der ersten und der zweiten Krümmungslinie auffasst. Die positive Flächennormale wird, wie immer, durch die Ausdrücke ihrer Richtungscosinus

$$(8.)\qquad X = D_a(y, z), \quad \dots$$

gegeben. Unter diesen Voraussetzungen ist dann noch

$$(9.)\qquad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = +1$$

oder für $(XYZ) \equiv n$

$$(10.)\qquad (n_1, n_2, n) \frown (x, y, z)$$

— da hierfür nur das Bestehen der Gleichung IV. (20.) erfordert wird —, und es gelten die a. a. O. S. 341—342 angegebenen Formeln.

Anmerkung zu S. 185. Ich benutze diese Gelegenheit, um hinsichtlich einiger Schlüsse, welche ich in der erwähnten (zum Theil mehrere Jahre vor der Datirung niedergeschriebenen) Abhandlung benutzt habe, die Priorität der Publication von Seiten *Riccis* ausdrücklich hervorzuheben. Diese Schlüsse als solche spielen übrigens a. a. O. eine nebensächliche Rolle: Es kam mir darauf an, für die Covarianz der Form Φ einen von den *Christoffel*schen Relationen unabhängigen Beweis zu liefern, und eine Klasse flächentheoretischer Probleme, welche in neuerer Zeit die Mathematiker vielfach beschäftigt haben, in eine bis dahin nicht beachtete Form zu setzen.

Anmerkung zu S. 186. Die Ansicht, welche Herr *Tullio Levi-Civita* in seiner Dissertation „Sugli invarianti assoluti" (Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti VII, 5 (1894)) über den Inhalt der in diesem Journal Bd. 110 veröffentlichten Abhandlung von *Frobenius* und meiner im Text citirten Arbeit äussert, ist hiernach richtig zu stellen.

Logau, October 1894.

Sur la fonction $\log \Gamma(a)$.

(Extrait d'une lettre de M. *Ch. Hermite* à M. *K. Hensel*.)

...Je me permets de vous faire part de quelques remarques, dont l'objet est d'étendre le champ de la question du développement en série de la fonction $\log \Gamma(a)$, comme je l'ai déjà essayé dans un article des „Mathematische Annalen", vol. 41 p. 581 où a été envisagée l'expression plus générale:

$$\log[\Gamma(a+\xi)\,\Gamma(a+1-\xi)],$$

en supposant $0 < \xi < 1$. On peut sous cette condition traiter de même la quantité $\log \Gamma(a+\xi)$, la développer suivant les puissances descendantes de a et reconnaître que la série obtenue doit être employée comme celle de *Stirling*.

Je désigne par J afin d'abréger l'intégrale de *Raabe*, de sorte qu'on ait:

$$J = \int_0^1 \log \Gamma(a+x)\,dx = a\log a - a + \log\sqrt{2\pi},$$

cela étant on démontre aisément la relation suivante:

$$\log \Gamma(a+\xi) - J - (\xi-\tfrac{1}{2})\log a = \int_{-\infty}^{0} F(x)\,e^{ax}\,dx,$$

où j'ai posé:

$$F(x) = \left[\frac{e^{\xi x}-1}{e^x-1} - \xi + \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right]\frac{1}{x}\,.$$

La formule de *Cauchy*

$$\log \Gamma(a) = \int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{ax}-e^x}{e^x-1} - (a-1)e^x\right]\frac{dx}{x}$$

donne en effet:

$$\log \Gamma(a+\xi) = \int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{(a+\xi)x}-e^x}{e^x-1} - (a+\xi-1)e^x\right]\frac{dx}{x},$$

et l'on en tire

$$\int_0^1 \log \Gamma(a+x)\,dx = \int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{ax}}{x} - \frac{e^x}{e^x-1} - (a-\tfrac{1}{2})e^x\right]\frac{dx}{x}\,;$$

cela étant, l'égalité

$$(\xi-\tfrac{1}{2})\log a = \int_{-\infty}^{0}(\xi-\tfrac{1}{2})(e^{ax}-e^{x})\frac{dx}{x},$$

conduit immédiatement au résultat énoncé.

Soit ensuite

$$F_1(x) = \left[\frac{e^{\xi x}-1}{e^{x}-1}-\xi\right]\frac{1}{x},$$

nous aurons pareillement

$$\log\frac{\Gamma(a+\xi)}{\Gamma(a)}-\xi\log a = \int_{-\infty}^{0}F_1(x)e^{ax}dx.$$

Les intégrales qui s'offrent dans ces deux relations,

$$\int_{-\infty}^{0}F(x)e^{ax}dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{0}F_1(x)e^{ax}dx$$

présentent l'une et l'autre la même circonstance que la quantité a n'y figure que dans le facteur e^{ax}. Elles sont finies sous la condition que nous avons admise $\xi<1$, elles s'évanouissent pour une valeur infinie de a, et par là il est immédiatement établi, qu'on a asymptotiquement:

$$\log\Gamma(a+\xi) = J+(\xi-\tfrac{1}{2})\log a = (a+\xi-\tfrac{1}{2})\log a-a+\log\sqrt{2\pi},$$

$$\log\frac{\Gamma(a+\xi)}{\Gamma(a)} = \xi\log a.$$

Je me propose maintenant de tirer de ces intégrales des développements en série suivant les puissances décroissantes de a, en obtenant les valeurs des coefficients et l'expression des restes, lorsqu'on les limite à un nombre fini de termes.

Soit $S_n(\xi)$ la fonction de *Jacob Bernoulli*, le polynôme de degré $n+1$, qui est égal pour ξ entier à la somme $1^n+2^n+\cdots+(\xi-1)^n$, on a d'abord

$$\frac{e^{\xi x}-1}{e^{\xi}-1} = \xi+\sum\frac{S_n(\xi)x^n}{1.2\ldots n} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

et par conséquent:

$$\left[\frac{e^{\xi x}-1}{e^{x}-1}-\xi\right]\frac{1}{x} = \sum\frac{S_n(\xi)x^{n-1}}{1.2\ldots n}.$$

J'emploie ensuite l'identité:

$$\left[\frac{1}{e^{x}-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right]\frac{1}{x} = \sum\frac{(-1)^{n-1}B_n x^{2n-2}}{1.2\ldots 2n} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

où B_1, B_2, ... désignent les nombres de *Bernoulli*, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, ...; nous aurons d'abord en ajoutant membre à membre:

$$F(x) = \Sigma\frac{S_n(\xi)x^{n-1}}{1.2\ldots n}+\Sigma\frac{(-1)^{n-1}B_n x^{2n-2}}{1.2\ldots 2n}$$

et en second lieu:

$$F_1(x) = \Sigma\frac{S_n(\xi)x^{n-1}}{1.2\ldots n}.$$

Cela étant, il suffit de recourir à la formule:

$$\int_{-\infty}^{0} x^m e^{ax}dx = (-1)^m\frac{1.2\ldots m}{a^{m+1}}$$

pour obtenir les expressions suivantes:

$$\int_{-\infty}^{0} F(x)e^{ax}dx = \Sigma\frac{(-1)^{n-1}S_n(\xi)}{na^n}+\Sigma\frac{(-1)^{n-1}B_n}{2n(2n-1)a^{2n-1}},$$

$$\int_{-\infty}^{0} F_1(x)e^{ax}dx = \Sigma\frac{(-1)^{n-1}S_n(\xi)}{na^n}. \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

Mais les développements de $F(x)$ et $F_1(x)$ supposent le module de la variable inférieur à 2π. On ne peut donc les employer dans les intégrales, les séries qu'on en tire sont divergentes, B_n et $S_n(\xi)$ croissent rapidement lorsque n augmente. Pour obtenir l'extension que j'ai en vue de la formule de *Stirling* je vais y parvenir par une autre voie, afin de les limiter, comme il est nécessaire, à un nombre fini des termes.

J'emploie dans ce but les expressions de $F(x)$ et $F_1(x)$ qu'on obtient par l'application du théorème de M. *Mittag-Leffler*. Les pôles de ces fonctions sont, en excluant $x=0$, qui est un pôle apparent, les racines $x=2mi\pi$ de l'équation $e^x=1$. Réunissons les fractions simples, qui correspondent aux entiers m et $-m$, on aura en désignant par $G(x)$ une fonction holomorphe:

$$F(x) = G(x)+\Sigma\frac{x\sin 2m\pi\xi}{m\pi(4m^2\pi^2+x^2)}-\Sigma\frac{4\sin^2 m\pi\xi}{4m^2\pi^2+x^2}+\Sigma\frac{2}{4m^2\pi^2+x^2}. \qquad (m=1,2,3,\ldots)$$

Si nous supposons ξ compris entre zéro et l'unité, cette fonction est nulle, et l'on trouvera pareillement pour $F_1(x)$, la formule:

$$F_1(x) = \Sigma\frac{x\sin 2m\pi\xi}{m\pi(4m^2\pi^2+x^2)}-\Sigma\frac{4\sin^2 m\pi\xi}{4m^2\pi^2+x^2}. \qquad (m=1,2,3,\ldots)$$

Au moyen de ces expressions, les intégrales $\int_{-\infty}^{0} F(x)e^{ax}dx$ et $\int_{-\infty}^{0} F_1(x)e^{ax}dx$, prennent les formes suivantes. Remarquons d'abord, qu'il vient en changeant x en $\frac{2m\pi x}{a}$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{xe^{ax}dx}{4m^2\pi^2+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{xe^{2m\pi x}dx}{a^2+x^2},\quad \int_{-\infty}^{0}\frac{e^{ax}dx}{4m^2\pi^2+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{ae^{2m\pi x}dx}{2m\pi(a^2+x^2)};$$

posons donc pour abréger

$$\varphi(x) = \Sigma \frac{e^{2m\pi x}\sin 2m\pi\xi}{m},$$

$$\psi(x) = \Sigma \frac{e^{2m\pi x}\sin^2 m\pi\xi}{m},$$

$$\chi(x) = \Sigma \frac{e^{2m\pi x}}{m},$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots)$$

et l'on aura:

$$\int_{-\infty}^{0} F(x)e^{ax}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{x\varphi(x)dx}{a^2+x^2} - \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{a\psi(x)dx}{a^2+x^2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{a\chi(x)dx}{a^2+x^2}$$

$$\int_{-\infty}^{0} F_1(x)e^{ax}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{x\varphi(x)dx}{a^2+x^2} - \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{a\psi(x)dx}{a^2+x^2}.$$

Voici les conséquences à tirer de ces nouvelles expressions. Je remarque en premier lieu que la variable x étant négative dans les intégrales, l'exponentielle e^x est moindre que l'unité, et l'on a:

$$\varphi(x) = \operatorname{arctg}\frac{e^{2\pi x}\sin 2\pi\xi}{1-e^{2\pi x}\cos 2\pi\xi},$$

$$\psi(x) = \tfrac{1}{4}\log[1-2e^{2\pi x}\cos 2\pi\xi + e^{4\pi x}] - \tfrac{1}{2}\log(1-e^{2\pi x}),$$

$$\chi(x) = -\log(1-e^{2\pi x}).$$

Dans la première égalité l'arc tangente doit être pris entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, $\varphi(x)$ est donc, quel que soit x, du même signe que $\sin 2\pi\xi$; quant aux deux autres fonctions les développements montrent, qu'elles sont positives pour toutes les valeurs considérées de la variable. C'est là ce qui va nous permettre de remplacer par des séries finies les développements illimités précédemment obtenus, à savoir:

$$\int_{-\infty}^{0} F(x)e^{ax}\,dx = \Sigma\frac{(-1)^{n-1}S_n(\xi)}{na^n} + \Sigma\frac{(-1)^{n-1}B_n}{2n(2n-1)a^{2n-1}},$$

$$\int_{-\infty}^{0} F_1(x)e^{ax}\,dx = \Sigma\frac{(-1)^{n-1}S_n(\xi)}{na^n}.$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

A cet effet j'observe que l'ensemble des puissances paires de $\frac{1}{a}$ qui est le même dans les seconds membres des deux égalités est représenté par $-\Sigma\frac{S_{2n}(\xi)}{2na^{2n}}$, et provient par conséquent de l'intégrale $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{x\varphi(x)dx}{a^2+x^2}$. En employant l'identité

$$\frac{x}{a^2+x^2} = \frac{x}{a^2} - \frac{x^3}{a^4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{a^{2n}} + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{a^{2n}(a^2+x^2)}$$

et égalant les termes en $\frac{1}{a^{2n}}$ nous parvenons donc à cette expression digne de remarque:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} x^{2n-1}\varphi(x)dx = \frac{(-1)^{n-1}S_{2n}(\xi)}{2n}.$$

Elle montre que la fonction d'indice pair $S_{2n}(\xi)$ a le même signe que $(-1)^{n-1}\sin 2\pi\xi$, propriété importante, bien connue et qui suppose ξ compris entre zéro et l'unité. En même temps nous voyons, qu'on peut écrire

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{x\varphi(x)dx}{a^2+x^2} = -\frac{S_2(\xi)}{2a^2}-\frac{S_4(\xi)}{4a^4}-\cdots-\frac{S_{2n}(\xi)}{2na^{2n}}+\frac{(-1)^n}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{x^{2n+1}\varphi(x)dx}{a^{2n}(a^2+x^2)},$$

il est donc facile d'obtenir une limite de l'intégrale qui représente le terme complémentaire. La fonction $\varphi(x)$ ne changeant pas de signe, on a en effet:

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{x^{2n+1}\varphi(x)dx}{a^{2n}(a^2+x^2)} = \theta\int_{-\infty}^{0}\frac{x^{2n+1}\varphi(x)dx}{a^{2n+2}},$$

θ étant un nombre positif inférieur à l'unité, et de là se tire le résultat, auquel je voulais parvenir:

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{x\varphi(x)dx}{a^2+x^2} = -\frac{S_2(\xi)}{2a^2}-\frac{S_4(\xi)}{4a^4}-\cdots-\frac{S_{2n}(\xi)}{2na^{2n}}-\frac{\theta S_{2n+2}(\xi)}{(2n+2)a^{2n+2}}.$$

Considérons en second lieu les puissances impaires de $\frac{1}{a}$, amenées par les intégrales $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{a\psi(x)dx}{a^2+x^2}$ et $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{a\chi(x)dx}{a^2+x^2}$. La seconde est connue par la série de *Stirling*, et nous avons immédiatement, en désignant par θ_2 une quantité plus petite que l'unité:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{a\chi(x)dx}{a^2+x^2} = \frac{B_1}{2a}-\frac{B_2}{3.4a^3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}B_n}{2n.(2n-1)a^{2n-1}}+\frac{(-1)^n\theta_2 B_{n+1}}{(2n+2)(2n+1)a^{2n+1}}.$$

C'est par conséquent de la première que provient l'ensemble des termes représenté par $\Sigma\frac{S_{2n-1}(\xi)}{(2n-1)a^{2n-1}}$ en faisant $n = 1, 2, 3 \ldots$. Opérons comme tout à l'heure et employons l'identité

$$\frac{a}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}-\frac{x^2}{a^3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{a^{2n-1}}+\frac{(-1)^n.x^{2n}}{a^{2n-1}(a^2+x^2)},$$

nous obtenons d'abord la formule

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{0}x^{2n-2}\psi(x)dx = \frac{(-1)^n.S_{2n-1}(\xi)}{2n-1}$$

d'où se tire la proposition, que $S_{2n-1}(\xi)$ est constamment du signe de $(-1)^n$, lorsque ξ varie de zéro à l'unité, l'intégrale du premier membre étant positive.

Nous avons ensuite l'égalité:

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{a\psi(x)dx}{a^2+x^2} = -\frac{S_1(\xi)}{a}-\frac{S_3(\xi)}{3a^3}-\cdots$$

$$\cdots-\frac{S_{2n-1}(\xi)}{(2n-1)a^{2n-1}}+\frac{2(-1)^n}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{x^{2n}.\psi(x)dx}{a^{2n-1}(a^2+x^2)}$$

où l'on peut écrire, en désignant par θ_1 un nombre inférieur à un,

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{x^{2n}\psi(x)dx}{a^{2n-1}(a^2+x^2)} = \theta_1\int_{-\infty}^{0}\frac{x^{2n}.\psi(x)dx}{a^{2n+1}}.$$

On en conclut comme précédemment cette expression finie avec un terme complémentaire:

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{a\psi(x)dx}{a^2+x^2} = -\frac{S_1(\xi)}{a}-\frac{S_3(\xi)}{3a^3}-\cdots-\frac{S_{2n-1}(\xi)}{(2n-1)a^{2n-1}}-\frac{\theta_1 S_{2n+1}(\xi)}{(2n+1)a^{2n+1}},$$

et nous obtenons en définitive les séries suivantes:

$$\begin{aligned}\log\Gamma(a+\xi) = {} & (a+\xi-\tfrac{1}{2})\log a-a+\log\sqrt{2\pi}\\ & -\frac{S_2(\xi)}{2a^2}-\frac{S_4(\xi)}{4a^4}-\cdots-\frac{S_{2n}(\xi)}{2na^{2n}}-\frac{\theta S_{2n+2}(\xi)}{(2n+2)a^{2n+2}}\\ & +\frac{S_1(\xi)}{a}+\frac{S_3(\xi)}{3a^3}+\cdots+\frac{S_{2n-1}(\xi)}{(2n-1)a^{2n-1}}+\frac{\theta_1 S_{2n+1}(\xi)}{(2n+1)a^{2n+1}}\\ & +\frac{B_1}{2a}-\frac{B_2}{3.4.a^3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}B_n}{2n(2n-1)a^{2n-1}}+\frac{(-1)^n\theta_2 B_{n+1}}{(2n+2)(2n+1)a^{2n+1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log\frac{\Gamma(a+\xi)}{\Gamma(a)} = {} & \xi\log a-\frac{S_2(\xi)}{2a^2}-\frac{S_4(\xi)}{4a^4}-\cdots-\frac{S_{2n}(\xi)}{2na^{2n}}-\frac{\theta S_{2n+2}(\xi)}{(2n+2)a^{2n+2}}\\ & +\frac{S_1(\xi)}{a}+\frac{S_3(\xi)}{3a^3}+\cdots+\frac{S_{2n-1}(\xi)}{(2n-1)a^{2n-1}}+\frac{\theta_1 S_{2n+1}(\xi)}{(2n+1)a^{2n+1}}.\end{aligned}$$

Elles ont la propriété caractéristique de la formule de *Stirling*, qu'en s'arrêtant à un terme de rang quelconque, l'erreur a pour limite supérieure le terme suivant.

Si l'on suppose $\xi=\frac{1}{2}$, la seconde égalité donne ce résultat:

$$\log\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma(a)} = \frac{1}{2}\log a-\frac{1}{2^3.a}+\frac{1}{3.2^6.a^3}-\frac{1}{5.2^7.a^5}+\cdots+\frac{(-1)^n(2^{2n}-1)B_n}{(2n-1).n.2^{2n}.a^{2n-1}}+\cdots$$

qui est la conséquence des relations

$$S_{2n-1}(\tfrac{1}{2})=0,\quad S_{2n}(\tfrac{1}{2})=\frac{(-1)^n(2^{2n}-1)B_n}{n.2^{2n}}.$$

Post-scriptum.

Je m'aperçois qu'on peut obtenir les expressions des intégrales $\int_{-\infty}^{0}F(x)e^{ax}dx$, $\int_{-\infty}^{0}F_1(x)e^{ax}dx$ par une méthode plus facile et plus simple, la voici en peu de mots.

Je pars de cette identité qui se vérifie en différentiant,

$$\int F(x)e^{ax}dx = \left[\frac{F(x)}{a} - \frac{F'(x)}{a^2} + \cdots - \frac{F^{2n-1}(x)}{a^{2n-1}}\right]e^{ax} + \int \frac{F^{2n}(x)e^{ax}}{a^{2n}}dx$$

et d'où l'on conclut,

$$\int_{-\infty}^{0} F(x)e^{ax}dx = \frac{F(0)}{a} - \frac{F'(0)}{a^2} + \cdots - \frac{F^{2n-1}(0)}{a^{2n-1}} + \int_{-\infty}^{0} \frac{F^{2n}(x)e^{ax}}{a^{2n}}dx.$$

Cela étant, les quantités $F(0)$, $F'(0)$ etc. se déterminent au moyen de la relation:

$$F(x) = \Sigma \frac{S_n(\xi)x^{n-1}}{1.2\ldots n} + \Sigma \frac{(-1)^{n-1}B_n x^{2n-2}}{1.2\ldots 2n},$$

ou bien en séparant dans la première somme, les puissances paires et impaires

$$F(x) = \Sigma \frac{S_{2n}(\xi)x^{2n-1}}{1.2\ldots 2n} + \Sigma \frac{S_{2n-1}(\xi)x^{2n-2}}{1.2\ldots 2n-1} + \Sigma \frac{(-1)^{n-1}B_n x^{2n-2}}{1.2\ldots 2n}.$$

On en tire immédiatement

$$F^{2n-1}(0) = \frac{S_{2n}(\xi)}{2n}, \quad F^{2n-2}(0) = \frac{S_{2n-1}(\xi)}{2n-1} + \frac{(-1)^{n-1}B_n}{2n(2n-1)},$$

d'où résulte par conséquent la série finie qui a été précédemment trouvée; mais le point le plus important concerne le terme complémentaire représenté par l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} \frac{F^{2n}(x)e^{ax}}{a^{2n}}dx$. Revenant à cet effet à l'égalité

$$F(x) = \Sigma \frac{x \sin 2m\pi\xi}{m\pi(4m^2\pi^2+x^2)} - \Sigma \frac{4\sin^2 m\pi\xi}{4m^2\pi^2+x^2} + \Sigma \frac{2}{4m^2\pi^2+x^2},$$

j'observe que les formules connues

$$\frac{x}{4m^2\pi^2+x^2} = -\int_{-\infty}^{0} e^{2m\pi y}\sin xy\, dy, \quad \frac{1}{4m^2\pi^2+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2m\pi} e^{2m\pi x}\cos xy\, dy,$$

permettent d'écrire

$$\begin{aligned} F(x) = &-\Sigma \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{m\pi} e^{2m\pi y}\sin 2m\pi\xi \sin xy\, dy \\ &-\Sigma \int_{-\infty}^{0} \frac{2}{m\pi} \sin^2 m\pi\xi \cos xy\, dy \\ &+\Sigma \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{m\pi} \cos xy\, dy. \end{aligned}$$

Les fonctions désignées précédemment par $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$, s'introduisent alors d'elles-mêmes et l'on trouve ainsi

$$F(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \varphi(y)\sin xy\, dy - \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \psi(y)\cos xy\, dy + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \chi(y)\cos xy\, dy.$$

La variable x par suite de cette transformation n'entre plus que dans les quantités $\sin xy$ et $\cos xy$, nous avons donc:

$$(-1)^n F^{2n}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\varphi(y)\sin xy.y^{2n}dy - \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\psi(y)\cos xy.y^{2n}dy$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\chi(y)\cos xy.y^{2n}$$

et par conséquent:

$$(-1)^n\int_{-\infty}^{0}F^{2n}(x)e^{ax}dy = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\varphi(y)\sin xy.y^{2n}e^{ax}dx\,dy$$
$$-\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\psi(y)\cos xy.y^{2n}e^{ax}dx\,dy$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\chi(y)\cos xy.y^{2n}e^{ax}dx\,dy.$$

On peut effectuer les intégrations par rapport à cette variable x, ce donne après avoir divisé par a^{2n}, l'expression du terme complémentaire laquelle j'étais parvenu,

$$(-1)^n\int_{-\infty}^{0}\frac{F^{2n}(x)e^{ax}}{a^{2n}}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{y^{2n+1}\varphi(y)}{a^{2n}(a^2+y^2)}dy - \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{y^{2n}\psi(y)}{a^{2n-1}(a^2+y^2)}dy$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\chi(y)y^{2n}}{a^{2n-1}(a^2+y^2)}$$

et nous aurons pareillement, pour le reste de la seconde série,

$$(-1)^n\int_{-\infty}^{0}\frac{F_1^{2n}(x)e^{ax}}{a^{2n}}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{y^{2n+1}\varphi(y)}{a^{2n}(a^2+y^2)}dy - \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{y^{2n}\psi(y)}{a^{2n-1}(a^2+y^2)}dy.$$

J'ajoute enfin en considérant l'une quelconque des trois intégrales première par exemple, que si l'on pose

$$R_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{y^{2n+1}\varphi(y)}{a^{2n}(a^2+y^2)},\quad U_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{y^{2n-1}\varphi(y)}{a^{2n}}dy,$$

avec la série correspondante

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{y\varphi(y)}{a^2+y^2}dy = U_0-U_1+\cdots+(-1)^{n-1}U_n+(-1)^nR_n$$

la relation

$$R_{n-1}+R_n = U_n$$

où R_n, R_{n-1} et U_n sont positifs, donne immédiatement $R_n < U_n$, et R lorsqu'on a $R_{n-1} < R_n$. Ces deux limitations du reste ont été à l'égard de la série de *Stirling* par *M. Bourguet* dans sa bell doctorat sur le développement en séries des intégrales Eulérienne de l'École Normale Supérieure, année 1880).

Paris, 17. mars 1895.

Der Resultantenbegriff in der sphärischen Trigonometrie.

(Von Herrn *Franz Meyer* in Clausthal.)

Während man früher die Resultante eines Systems von Formen als die, von fremden Factoren befreit gedachte, linke Seite der Eliminationsgleichung ansah, haben in neuerer Zeit *Kronecker, Perrin* u. A. die Resultante selbständig definirt als eine gewisse lineare Combination der gegebenen Formen. Die Coefficienten dieser Combination, die selbst noch von den Variablen abhängen, sind eben so zu wählen, dass aus dem ganzen Ausdrucke alle Variablen, oder wenigstens eine derselben, herausfallen.

Damit erscheint die Resultante nur als ein einzelner Fall einer allgemeineren Klasse von Bildungen, denn man kann über die Coefficienten der gedachten Combination in mannigfaltigster Weise so verfügen, dass der gesammte Ausdruck irgend welche andern ausgezeichneten oder kanonischen Eigenschaften erhält.

Ein Gebiet, in dem diese Erscheinungen in verschiedenartigster Form auftreten*), ist das der sphärischen, (oder, als Grenzfall, das der ebenen) Trigonometrie.

Geht man hier von drei unabhängigen Formeln aus, etwa, wie es gewöhnlich geschieht, von denen des sogenannten Cosinussatzes $A_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, so muss jede beliebige, durch elementare Processe hergeleitete Formel $G = 0$ der sphärischen Trigonometrie die Eigenschaft haben, dass sich der Ausdruck G als rationale oder irrationale Function der A darstellen lassen muss mit Coefficienten, die etwa nur noch von den „Seiten"

*) Vgl. die vorläufigen Mittheilungen in den Berichten der Naturforscherversammlung zu Wien 1894, sowie im III. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1895. Die vortreffliche Schrift von *E. Study* (Leipzig, Hirzel, 1893) verfolgt andere und weniger elementare Ziele. Der Verfasser möchte aber gerade darauf Gewicht legen, dass die Entwickelungen des Textes einen durchaus elementaren Charakter haben.

des Dreiecks abhängen; diese Function muss dann gleichzeitig mit den A verschwinden.

Wie sich solche Darstellungen im Einzelnen gestalten, ist in § I an einigen einfachen und sehr bekannten Formeln entwickelt, von denen ein Theil Resultantenbildungen, ein Theil andere Combinationen der A aufweist.

Die trigonometrischen Formeln zerfallen dadurch von selbst in Klassen je nach der Art der darstellenden Function: ist die letztere ganzrational, so wird man die Dimension derselben in Bezug auf die A als Eintheilungsgrund nehmen, ist die Function dagegen irrational, z. B. ein Factor einer reducibeln Resultante, den Grad der irreducibeln Gleichung, der die Function genügt.

Werfen schon derartige Betrachtungen ein neues Licht auf die Structur und den Zusammenhang der trigonometrischen Formeln, so ist das in noch höherem Masse der Fall, wenn man noch einen Schritt weiter geht.

Man wird nämlich dann sechs Formeln $C' = 0$, wie in § II, zu Grunde legen, die nur der Forderung zu genügen haben, dass zwischen den — eventuell mit geeigneten Factoren zu versehenden — Ausdrücken C' keine numerische Identität herrscht. Ist nun wiederum $G = 0$ eine beliebige trigonometrische Formel, so muss der Ausdruck G einer Gleichung genügen, deren Coefficienten numerische Functionen der C' sind.

Der dritte Schritt endlich — der aber zu vorläufig nicht zu bewältigenden Rechnungen führt — wäre der, hierbei auch dem Princip der Dualität gerecht zu werden.

§ I.

Die drei Grundformeln und die unmittelbar durch Combination und Elimination daraus hervorgehenden Formeln.

1. Man geht in der sphärischen Trigonometrie gewöhnlich aus von den drei Grundformeln:

$$\cos a_i - \cos a_k \cos a_l - \sin a_k \sin a_l \cos \alpha_i = 0, \qquad (i, k, l = 1, 2, 3)$$

wo die a und α die Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks bedeuten.

Um uns aber von vornherein von den üblichen Determinationen frei zu machen, verstehen wir von jetzt ab unter den a, α sechs unbeschränkt veränderliche, complexe Argumente. Ferner führen wir die linken Seiten der obigen Formeln als selbständige Functionen jener sechs Argumente ein, indem wir setzen

$$\text{(I.)} \qquad 2A_i \equiv \cos a_i - \cos a_k \cos a_l - \sin a_k \sin a_l \cos \alpha_i. \qquad (i, k, l = 1, 2, 3)$$

2. Da es sich bekanntlich als zweckmässig erweist, in den Grundformeln der sphärischen Trigonometrie die halben Argumente statt der ganzen einzuführen, so wird es auch hier von Nutzen sein, die Functionen (I.) in halben Argumenten auszudrücken.

Bezeichnet man, wie gewöhnlich, die halbe Summe der a mit s, wodurch $\frac{a_i+a_k-a_l}{2}$ die Form $s-a_l$ annimmt, so lässt sich auf Grund einfacher Hülfsformeln*) der Ausdruck (I.) umformen, wie folgt:

$$2A_i \equiv (\cos a_i - \cos a_k \cos a_l)\left(\cos^2\frac{\alpha_i}{2}+\sin^2\frac{\alpha_i}{2}\right) - \sin a_k \sin a_l\left(\cos^2\frac{\alpha_i}{2}-\sin^2\frac{\alpha_i}{2}\right)$$

$$\equiv \sin^2\frac{\alpha_i}{2}\,\{\cos a_i - \cos(a_k+a_l)\} - \cos^2\frac{\alpha_i}{2}\,\{\cos(a_k-a_l)-\cos a_i\}$$

$$\equiv 2\left\{\sin^2\frac{\alpha_i}{2}\sin s.\sin(s-a_i) - \cos^2\frac{\alpha_i}{2}\sin(s-a_k)\sin(s-a_l)\right\}.$$

Somit wird A_i in Function der halben Argumente $\frac{a}{2}$, $\frac{\alpha}{2}$:

$$\text{(I'.)} \qquad A_i \equiv \sin^2\frac{\alpha_i}{2} N_i - \cos^2\frac{\alpha_i}{2} Z_i,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\text{(1.)} \qquad \begin{cases} N_i \equiv \frac{1}{2}\{\cos a_i - \cos(a_k+a_l)\} \equiv \sin s.\sin(s-a_i), \\ Z_i \equiv \frac{1}{2}\{\cos(a_k-a_l)-\cos a_i\} \equiv \sin(s-a_k)\sin(s-a_l). \end{cases}$$

Man beachte die zwischen den Grössen N_i, Z_i herrschenden Relationen:

$$\text{(2.)} \qquad \begin{cases} N_i - Z_i \equiv \cos a_i - \cos a_k \cos a_l \equiv L_i, \\ N_i + Z_i \equiv \sin a_k \sin a_l \equiv M_i, \\ 4N_iZ_i \equiv 4\sin s.\sin(s-a_1)\sin(s-a_2)\sin(s-a_3) \\ \qquad \equiv 1-2\cos a_1\cos a_2\cos a_3 - (\cos^2 a_1+\cos^2 a_2+\cos^2 a_3) \\ \qquad \equiv 4N_kZ_k \equiv 4N_lZ_l \equiv 4S, \end{cases}$$

wo die Zeichen L_i, M_i, S zur Abkürzung dienen.

Verbindet man (I'.) mit der Identität $\sin^2\frac{\alpha_i}{2}+\cos^2\frac{\alpha_i}{2} = 1$, so ergiebt sich mit Rücksicht auf den Werth von N_i+Z_i:

$$\text{(3.)} \qquad \begin{cases} \sin^2\frac{\alpha_i}{2}\sin a_k \sin a_l \equiv Z_i + A_i, \\ \cos^2\frac{\alpha_i}{2}\sin a_k \sin a_l \equiv N_i - A_i. \end{cases}$$

*) Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass die Formeln der gewöhnlichen Goniometrie (wie „$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$, das Additionstheorem, die Formeln für halbe Argu-

Setzt man nunmehr $A_i = 0$, so gelangt man zu den bekannten Formeln zurück:

$$\sin\frac{\alpha_i}{2} = \pm\sqrt{\frac{\sin(s-a_k)\sin(s-a_l)}{\sin a_k \sin a_l}}, \quad \cos\frac{\alpha_i}{2} = \pm\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a_i)}{\sin a_k \sin a_l}}.$$

Das doppelte Vorzeichen reducirt sich auf das positive, sobald man die Forderung hinzufügt, dass das sphärische Dreieck reell sei. (Entsprechendes gilt für einige der späteren Formeln).

3. Aus den Formeln (2.), (3.) folgt einerseits:

$$(4.) \qquad \cos\alpha_i \sin a_k \sin a_l \equiv N_i - Z_i - 2A_i \equiv L_i - 2A_i,$$

andererseits:

$$(5.) \qquad \tfrac{1}{4}\sin^2\alpha_i(\sin a_k \sin a_l)^2 \equiv -A_i^2 + A_i L_i + S \equiv Q_i,$$

wo Q_i ein weiteres Abkürzungszeichen ist.

Eine unmittelbare Folge der letzten Identität ist die folgende:

$$\tfrac{1}{4}\sin^2 a_l(\sin^2\alpha_i \sin^2 a_k - \sin^2\alpha_k \sin^2 a_i) \equiv (A_k^2 - A_i^2) - (A_k L_k - A_i L_i) \equiv Q_i - Q_k,$$

oder, bei Einführung des Ausdrucks B_l*):

$$(6.) \qquad 4B_l \equiv \sin^2\alpha_i \sin^2 a_k - \sin^2\alpha_k \sin^2 a_i:$$

$$(\text{II.}) \qquad \sin^2 a_l B_l \equiv (A_k^2 - A_i^2) - (A_k L_k - A_i L_i).$$

Der Ausdruck $4B_l$ ist nichts anderes, als das von fremden Factoren befreite rationale Resultat der Elimination von a_l aus A_i und A_k, oder, was hier dasselbe ist, der Elimination von a_l und α_l aus den drei Ausdrücken (I.).

Nennen wir daher $4B_l$ die *„rationale Resultante"* der Ausdrücke (I.) bezüglich a_l und α_l, so sagt die Identität (II.) aus:

„Die mit $\sin^2 a_l$ multiplicirte rationale Resultante von (I.) *bezüglich a_l und α_l ist eine ganze rationale Function (Form) zweiten Grades der Ausdrücke $2A$, mit Coefficienten, die selbst ganzzahlige Formen der ($\sin a$**) und) $\cos a$ sind."*

4. Hieran schliesst sich die Frage, in wie weit die Darstellung der rechten Seite von (II.) einer Abänderung fähig ist.

---

mente") auch für complexe Argumente gültig bleiben; unter sin und cos sind dann die bezüglichen, beständig convergirenden Potenzreihen zu verstehen.

*) Die drei Ausdrücke B_l sind offenbar an die Identität $\Sigma\sin^2 a_l B_l = 0$ gebunden, und ebenso an die dualistische: $\Sigma\sin^2\alpha_l B_l = 0$. Umgekehrt bestimmen die beiden Identitäten die Ausdrücke B_l bis auf einen Proportionalitätsfactor; normirt man den letzteren gleich $\frac{1}{4}$, so hat man gerade die Grössen (6.).

**) Die $\sin a$ kommen hier (mit Rücksicht auf (2.)), wie in einigen späteren Formeln explicite nicht vor.

Auf dem gegenwärtigen Standpunkte wird die Forderung festzuhalten sein, dass jeder Darstellung der linken Seite von (II.) in Function der A die Eigenschaft zukommen soll, dass die auftretenden Coefficienten allein von den a abhängen.

Wäre jetzt eine zweite Darstellung der linken Seite von (II.) in Function der A möglich, so müsste zwischen den A eine Identität bestehen, deren Coefficienten ebenfalls nur von den a abhingen. Dies ist aber sicher nicht der Fall, da man ja aus den drei Gleichungen $A=0$ die Grössen α berechnen kann.

„*Die Darstellung* (II.) *ist insofern eine eindeutige, als die rechte Seite eine Function der A ist, deren Coefficienten nur von den a abhängen.*"

Der entsprechende Zusatz gilt auch für die folgenden Darstellungen.

5. Es möge noch die Richtigkeit der Formel (II.) direct bestätigt werden. Zu diesem Zwecke schreiben wir sie so, dass die rechte Seite als Combination von $2A_i$ und $2A_k$ erscheint:

$$\text{(II.)} \qquad 4\sin^2 a_l B_l \equiv 2A_k(2A_k-2L_k)-2A_i(2A_i-2L_i).$$

Diese rechte Seite lässt sich successive umformen, wie folgt:

$$\begin{aligned} & -(L_k-M_k\cos\alpha_k)(L_k+M_k\cos\alpha_k)+(L_i-M_i\cos\alpha_i)(L_i+M_i\cos\alpha_i) \\ \equiv\ & (L_i^2-L_k^2)-(M_i^2\cos^2\alpha_i-M_k^2\cos^2\alpha_k) \\ \equiv\ & (L_i^2-M_i^2)-(L_k^2-M_k^2)+(\sin^2\alpha_i M_i^2-\sin^2\alpha_k M_k^2) \\ \equiv\ & (L_i^2-M_i^2)-(L_k^2-M_k^2)+4B_l\sin^2 a_l. \end{aligned}$$

Hier zerstören sich aber die beiden ersten Klammern. Denn zufolge (2.) ist:

$$\text{(7.)} \quad L_i^2-M_i^2 \equiv (N_i-Z_i)^2-(N_i+Z_i)^2 \equiv -4N_iZ_i \equiv -4S \equiv L_k^2-M_k^2.$$

Die Identität (II.) enthält den sogenannten Sinussatz. Denn durch Nullsetzen von A_i und A_k ergiebt sich:

$$\sin\alpha_i\sin a_k = \pm\sin\alpha_k\sin a_i,$$

wo für reelle Dreiecke wiederum nur das positive Zeichen zu nehmen ist.

Einen solchen Ausdruck, wie $\sin\alpha_i\sin a_k\pm\sin\alpha_k\sin a_i$ wird man eine „*irrationale Resultante*" von A_i, A_k bezw. a_l nennen.

6. Wir kommen zu einer ebenfalls häufig gebrauchten Formelgruppe der Trigonometrie, nämlich:

$$\sin a_k\cos\alpha_i = \cos a_i\sin a_l-\sin a_i\cos a_l\cos\alpha_k.$$

Diese gewinnt man unmittelbar durch Bildung der linearen Combination

$2(A_i+A_k\cos a_i)$. Es wird:

$$(8.)\quad \begin{cases} 2(A_i+A_k\cos a_l) \equiv \cos a_i(1-\cos^2 a_l)-\sin a_l(\sin a_k\cos\alpha_i-\sin a_i\cos a_l\cos\alpha_k) \\ \qquad \equiv \sin a_l(\cos a_i\sin a_l-\sin a_k\cos\alpha_i-\sin a_i\cos a_l\cos\alpha_k). \end{cases}$$

Vermöge der Abkürzung:

$$(9.)\qquad 2C_{ik} \equiv \cos a_i\sin a_l-\sin a_k\cos\alpha_i-\sin a_i\cos a_l\cos\alpha_k$$

geht (8.) über in die gesuchte Formel:

$$(\text{III.})\qquad \sin a_l C_{ik} \equiv A_i+A_k\cos a_l.$$

Stellt man die Identität (III.) einmal für C_{ik}, das andere Mal für C_{ki} auf, so kommt einerseits durch Subtraction, nach Hebung mit $2\sin\frac{a_l}{2}$:

$$(10.)\qquad \sin\frac{a_l}{2}(A_i-A_k) \equiv \cos\frac{a_l}{2}(C_{ik}-C_{ki})\,^{*}),$$

andererseits durch Elimination von A_k:

$$(11.)\qquad A_i\sin a_l \equiv C_{ik}-C_{ki}\cos a_l$$

und entsprechend:

$$(11'.)\qquad A_i\sin a_k \equiv C_{il}-C_{li}\cos a_k.$$

Eliminirt man nun noch A_i aus (11.) und (11'.), so entstehen im ganzen drei Relationen zwischen den sechs Ausdrücken C, welche zugleich das Ergebniss der Elimination der α aus (9.) darstellen:

$$(12.)\qquad C_{ik}\sin a_k-C_{il}\sin a_l \equiv C_{ki}\cos a_l\sin a_k-C_{li}\cos a_k\sin a_l.$$

7. Dass zwischen den C nicht etwa eine lineare Relation mit numerischen Coefficienten herrscht, geht aus (III.) sofort hervor; eine andere Frage dagegen ist, ob nicht die C einer numerischen Relation höheren Grades genügen. Um darüber zu entscheiden, beachte man, dass neben der Gleichung (10.) eine ganz ähnliche, durch Addition aus (III.) hervorgehende Gleichung besteht, nämlich:

$$(13.)\qquad \cos\frac{a_l}{2}(A_i+A_k) \equiv \sin\frac{a_l}{2}(C_{ik}+C_{ki}).$$

Durch Multiplication beider erhält man:

$$(14.)\qquad A_i^2-A_k^2 \equiv C_{ik}^2-C_{ki}^2.$$

Hieraus folgt, dass die C an eine, aber auch nur an eine einzige algebraische

---

*) Aus (10.) folgt auch noch die Identität:

$$\operatorname{cotg}\frac{a_1}{2}(C_{23}-C_{32})+\operatorname{cotg}\frac{a_2}{2}(C_{31}-C_{13})+\operatorname{cotg}\frac{a_3}{2}(C_{12}-C_{21}) \equiv 0.$$

Relation mit numerischen Coefficienten gebunden sind:

$$(15.)\qquad C_{12}^2-C_{21}^2+C_{23}^2-C_{32}^2+C_{31}^2-C_{13}^2 \equiv 0.$$

Dagegen existirt keine solche Relation zwischen den C und einem der A.

8. Wir wollen nun auch rückwärts von den Relationen (12.) wieder zu den Definitionen der C (9.) gelangen.

Sieht man in (12.) die a als gegeben, die C als die Unbekannten an, so müssen sich die letzteren in Functionen dreier willkürlichen Parameter ergeben. Für diese hat man noch solche Functionen der α zu substituiren, dass (9.) mit (12.) äquivalent wird.

Die Ausführung gestaltet sich am einfachsten auf folgende Weise. Man schreibe (12.) in der Form:

$$(12'.)\qquad \sin a_k(C_{ik}-C_{ki}\cos a_l) = \sin a_l(C_{il}-C_{li}\cos a_k) = \lambda_i,$$

wo jetzt die drei Grössen λ_i die gemeinten Parameter repräsentiren.

Mit Hülfe der Formeln (9.) und I., oder noch leichter mittels (11.) und (11'.) würde man für λ_i den Werth finden:

$$(16.)\qquad \lambda_i = \sin a_k \sin a_l A_i.$$

In der That leistet nun diese Substitution das Gewünschte. Denn man erhält zunächst, wenn man für die A ihre wirklichen Werthe I. einsetzt, die Gleichungen:

$$2(C_{ik}-C_{ki}\cos a_l)-\sin a_l(\cos a_i-\cos a_k\cos a_l) = -\cos\alpha_i \sin a_k \sin^2 a_l,$$
$$2(C_{ki}-C_{ik}\cos a_l)-\sin a_l(\cos a_i-\cos a_k\cos a_l) = -\cos\alpha_k \sin a_i \sin^2 a_l,$$

deren Auflösung nach C_{ik} genau zu dem Werthe (9.) führt.

Das Ergebniss lässt sich formuliren, wie folgt:

Vermöge der Transformationsformeln (16.) *werden die in der Form* (12'.) *geschriebenen Gleichungssysteme* (12.) *und andererseits* (9.) *mit einander äquivalent.*

9. Wie der Sinussatz der sphärischen Trigonometrie entstand durch Elimination von a_l aus $A_i = 0$, $A_k = 0$, so gelangt man zu einer weiteren (in der Praxis weniger gebrauchten) Formel durch Elimination von a_k aus den nämlichen Gleichungen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, von a_k, α_l aus den Gleichungen $A = 0$, nämlich:

$$\operatorname{tg}\alpha_i = \pm\frac{\operatorname{tg} a_i \sin\alpha_k}{\sin a_l - \operatorname{tg} a_i \cos a_l \cos\alpha_k},$$

oder besser, mit Benutzung eines neuen Zeichens D_{ik}:

(17.) $$4D_{ik} \equiv \sin^2\alpha_i(\cos a_i \sin a_l - \sin a_i \cos a_l \cos\alpha_k)^2 - \cos^2\alpha_i \sin^2\alpha_k \sin^2 a_i = 0.$$

Auf Grund der Formeln (3.) ergiebt sich, worauf wir uns hier beschränken wollen:

„*Die mit $\sin^2 a_k \sin^2 a_l$ multiplicirte rationale Resultante $4D_{ik}$ von α_k, α_l aus den Ausdrücken $2A$ (I.) ist eine Form vierten Grades der $2A$, mit Coefficienten, die ganzzahlige Formen der $\sin a$, $\cos a$ sind.*"

10. Zu höheren Irrationalitäten gelangt man, wenn man die in (I'.), (3.), (6.), (17.) auftretenden Ausdrücke in Linearfactoren zerlegt und nach den Gleichungen fragt, welchen die letzteren genügen. Gerade solche Linearfactoren, gleich Null gesetzt, führen ja zu den üblichen Formeln für reelle Dreiecke.

Wir beginnen mit den in (I'.) und (3.) dargestellten Umformungen von (I.):

$$A_i \equiv \sin^2\frac{\alpha_i}{2} N_i - \cos^2\frac{\alpha_i}{2} Z_i \equiv \sin^2\frac{\alpha_i}{2} \sin a_k \sin a_l - Z_i \equiv N_i - \cos^2\frac{\alpha_i}{2} \sin a_k \sin a_l.$$

Setzt man nunmehr zur Abkürzung:

$$\begin{cases} A_i^{(1)} \equiv \sin\frac{\alpha_i}{2}\sqrt{N_i} - \cos\frac{\alpha_i}{2}\sqrt{Z_i}, \\ A_i^{(2)} \equiv \sin\frac{\alpha_i}{2}\sqrt{\sin a_k \sin a_l} - \sqrt{Z_i}, \\ A_i^{(3)} \equiv \cos\frac{\alpha_i}{2}\sqrt{\sin a_k \sin a_l} - \sqrt{N_i}, \end{cases}$$

wo die Quadratwurzeln beliebige Vorzeichen haben mögen, so schaffe man jedesmal durch zweimaliges Quadriren die Wurzelzeichen fort; dann genügen, mit Rücksicht auf (2.) und (5.), die drei Ausdrücke der Reihe nach den Gleichungen vierten Grades:

(18.) $$\begin{cases} (A_i^{(1)})^4(\sin a_k \sin a_l)^2 - 2(A_i^{(1)})^2(\sin a_k \sin a_l)(2S + A_i L_i) + A_i^2(4S + L_i^2) = 0, \\ (A_i^{(2)})^4 - 2(A_i^{(2)})^2(2Z_i + A_i) + A_i^2 = 0, \\ (A_i^{(3)})^4 - 2(A_i^{(3)})^2(2N_i - A_i) + A_i^2 = 0. \end{cases}$$

Oder auch: „*die Ausdrücke $2A_i^{(1)}\sin a_k \sin a_l$, $2A_i^{(2)}$, $2A_i^{(3)}$ genügen geraden Gleichungen vierten Grades, deren Coefficienten ganze, ganzzahlige Functionen der $\sin a$, $\cos a$ sind*".

Verfährt man entsprechend mit (6.), so wird man irgend einen der beiden Factoren als „irrationale Resultante" von $2A_i$, $2A_k$ bezw. a_l bezeichnen

können, also etwa:

$$(19.)\qquad 2B_l' \equiv \sin\alpha_i \sin a_k - \sin\alpha_k \sin a_i.$$

Dann kommt nach leichter Rechnung unter Bezugnahme auf (3.), (4.), (5.), (II.):

$$(20.)\qquad (B_l'\sin a_l)^4 - 2(B_l'\sin a_l)^2(Q_i+Q_k)+(\sin^2 a_l B_l)^2 = 0,$$

wo für $\sin^2 a_l B_l$ im freien Gliede $Q_i - Q_k$ nach (II.) zu substituiren ist.

Das Resultat lässt sich so ausdrücken:

„*Die mit* $\sin a_l$ *multiplicirte irrationale Resultante* $2B_l'$ (19.) *der* $2A$ *bezüglich* a_l, α_l *ist Wurzel einer biquadratischen Gleichung* (20.), *deren erster Coefficient gleich Eins, und deren beide andern Coefficienten ganzzahlige Formen der* $2A$, $(\sin a)$, $\cos a$ *sind.*"

11. Werfen wir zum Schlusse dieser Betrachtungen noch einen Blick auf die Rolle, welche die *Delambre-Gauss*schen und die *Neper*schen Formeln dabei spielen.

Die *Delambre-Gauss*schen Formeln verdanken ihre Entstehung der Einführung halber Summen und Differenzen der ursprünglichen Argumente a, α, nämlich von $\frac{a_k \pm a_l}{2}$, $\frac{\alpha_k \pm \alpha_l}{2}$ etc.; sie werden am einfachsten aus den am Ende von No. 2 für $\sin\frac{\alpha_i}{2}$, $\cos\frac{\alpha_i}{2}$ aufgeführten Ausdrücken hergeleitet, indem man zunächst nur von der einen Beschränkung Gebrauch macht, dass den Quadratwurzeln für $\sin\frac{\alpha_i}{2}$, $\cos\frac{\alpha_i}{2}$ je gleichnamige Vorzeichen auferlegt werden.

Die *Delambre-Gauss*schen Formeln führen dann immer noch ein doppeltes Vorzeichen mit sich, indem z. B. die erste lautet:

$$\sin\frac{a_i}{2}\cos\frac{\alpha_k-\alpha_l}{2} = \pm\sin\frac{\alpha_i}{2}\sin\frac{a_k+a_l}{2}.$$

In der That zeigt der Erfolg, dass es sich auch hier am meisten empfiehlt, folgende zwölf Ausdrücke ($i, k, l = 1, 2, 3$) zu Grunde zu legen:

$$(\text{IV.})\qquad \begin{cases} E_{i1} \equiv \sin^2\frac{a_i}{2}\cos^2\frac{\alpha_k-\alpha_l}{2} - \sin^2\frac{\alpha_i}{2}\sin^2\frac{a_k+a_l}{2}, \\ E_{i2} \equiv \cos^2\frac{a_i}{2}\cos^2\frac{\alpha_k+\alpha_l}{2} - \sin^2\frac{\alpha_i}{2}\cos^2\frac{a_k+a_l}{2}, \\ E_{i3} \equiv \sin^2\frac{a_i}{2}\sin^2\frac{\alpha_k-\alpha_l}{2} - \cos^2\frac{\alpha_i}{2}\sin^2\frac{a_k-a_l}{2}, \\ E_{i4} \equiv \cos^2\frac{a_i}{2}\sin^2\frac{\alpha_k+\alpha_l}{2} - \cos^2\frac{\alpha_i}{2}\cos^2\frac{a_k-a_l}{2}. \end{cases}$$

Führt man auch hier wieder statt der α die $2A$ (I.) ein, so zeigt sich, dass die Grössen (IV.) (bei festgehaltenem Zeiger i) nur eine einzige Irrationalität mit sich führen, nämlich diejenige, welche durch das Product $\sin\alpha_k \sin\alpha_l$ involvirt wird.

Eben dieses Product wird man daher zuerst eliminiren, um zu andern Identitäten zu gelangen, welche in den $2A$ und E rational sind, und zugleich in den E vom niedrigsten, d. i. vom ersten Grade.

Die einzigen Identitäten indessen, die sich so ergeben, sind:

$$(21.)\qquad E_{i1}+E_{i3} \equiv -A_i, \quad E_{i2}+E_{i4} \equiv A_i,$$

was unmittelbar die numerische Identität zur Folge hat:

$$(22.)\qquad E_{i1}+E_{i2}+E_{i3}+E_{i4} \equiv 0.$$

12. Um die α aus den zwölf Grössen E (IV.) zu eliminiren, hat man nur zu beachten, dass die E linear sind in den drei Grössen $\cos\alpha_i$, $\cos\alpha_k \cos\alpha_l$, $\sin\alpha_k \sin\alpha_l$, und dass sich auch umgekehrt die letzteren Grössen als lineare Functionen der E ergeben. Permutirt man die Indices, so hat man neun Darstellungsformeln für die neun Grössen $\cos\alpha_i$, $\cos\alpha_k \cos\alpha_l$, $\sin\alpha_k \sin\alpha_l$. Andererseits sind diese neun Grössen an sechs numerische Identitäten geknüpft, die man sofort hinschreiben kann. Die so gewonnenen sechs Identitäten, im Verein mit den drei, in (22.) niedergelegten, stellen das Resultat der Elimination der α aus den zwölf Grössen E (IV.) dar.

Würde es auch noch gelingen, aus jenen sechs Identitäten die a zu eliminiren — eine Aufgabe, die sehr schwierig zu sein scheint — so hätte man damit, im Verein mit (22.) die sechs numerischen Identitäten, welche zwischen den zwölf Grössen E herrschen.

Die *Neper*schen Formeln entstehen bekanntlich aus den *Delambre-Gauss*schen durch geeignete Division. Demgemäss hat man die folgenden Ausdrücke — die eben, gleich Null gesetzt, zu den *Neper*schen Formeln führen — zu bilden:

$$(\text{V.})\qquad \begin{cases} F_{i1} \equiv E_{i1}\cos^2\frac{a_k+a_l}{2} - E_{i2}\sin^2\frac{a_k+a_l}{2}, \\ F_{i2} \equiv E_{i3}\cos^2\frac{a_k-a_l}{2} - E_{i4}\sin^2\frac{a_k-a_l}{2}. \end{cases}$$

F_{i1} und F_{i2} sind linear in $\cos\alpha_k \cos\alpha_l$ und $\sin\alpha_k \sin\alpha_l$, und wiederum umgekehrt die beiden letzteren Producte linear in F_{i1} und F_{i2}.

Solcher Producte giebt es im Ganzen sechs, zwischen denen drei — nämlich die Hälfte der oben erwähnten sechs — numerische Identitäten

gelten. Diese drei Identitäten stellen das Resultat der Elimination der α aus den sechs Grössen F dar.

14. Die Gesammtheit der *Delambre-Gauss*schen Formeln ist bekanntlich in sich dualistisch. Es findet dieser Umstand hier darin seinen Ausdruck, dass sich neben die Formeln (21.) die folgenden stellen:

$$E_{i1}+E_{i2} \equiv A_i, \quad E_{i3}+E_{i4} \equiv -\mathsf{A}_i, \tag{23.}$$

wo A_i den zu A_i dualistischen Ausdruck bedeutet.

Das dualistische Moment bedingt nun überhaupt einen neuen, höheren Standpunkt. Wir wollen uns aber darauf beschränken, die Aufgabe zu formuliren, die sich dadurch aufdrängt:

„Sei $G(a, \alpha) = 0$ irgend eine Formel der sphärischen Trignometrie, so ist die numerische Identität aufzustellen, welche den Ausdruck G mit den sechs Ausdrücken A_i, A_i verknüpft.“

§ II.

Numerische Identitäten.

15. Die Identitäten, welche in No. 2 bis 10 mitgetheilt worden sind, waren, mit Ausnahme der einzigen (15.), mit Coefficienten behaftet, die selbst noch von den Argumenten a abhingen.

Eine aufmerksamere Betrachtung der erhaltenen Formeln lehrt indessen, wie man zu einer ganzen Reihe rein numerischer Identitäten gelangen kann, die auf den Zusammenhang der sphärischen Trigonometrie ein merkwürdiges Licht werfen.

Zu dem Behuf greifen wir auf die Formeln (12.) zurück. Führt man hier statt*) der C andere Ausdrücke C' ein, die sich von jenen nur durch je einen Factor unterscheiden, nämlich

$$C'_{ik} = \frac{C_{ik}}{\sin a_l}, \tag{24.}$$

so nehmen die Formeln (12.) die weit einfachere Gestalt an:

$$C'_{li}\cos a_k - C'_{ki}\cos a_l = C'_{il} - C'_{ik}. \tag{25.}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach den $\cos a$ liefert:

$$\left\{\begin{aligned} &\cos a_i (C'_{ik}C'_{kl}C'_{li} - C'_{ki}C'_{il}C'_{lk}) \\ &\qquad = C'_{ik}(C'^2_{il} - C'^2_{li}) + C'_{il}(C'^2_{ki} - C'^2_{ik}) + (C'_{ik}C'_{li}C'_{lk} - C'_{ki}C'_{il}C'_{kl}). \end{aligned}\right. \tag{26.}$$

---

*) Die C sind, wie schon in No. 7 betont, zu dem jetzigen Zwecke unbrauchbar, da sie ja an eine numerische Identität, nämlich (15.), gebunden sind.

Setzt man die so gewonnenen Werthe der $\cos a$ in die Formeln (11.), (11'.) ein, die jetzt so lauten:

$$A_i \equiv C'_{ik} - C'_{ki} \cos a_l \equiv C'_{il} - C'_{li} \cos a_k,$$

so kommt:

$$(27.) \quad \begin{cases} A_i (C'_{ik} C'_{kl} C'_{li} - C'_{ki} C'_{il} C'_{lk}) \\ \qquad \equiv (C'^2_{kl} - C'^2_{lk}) C'_{ki} C'_{li} + (C'^2_{li} - C'^2_{il}) C'_{ki} C'_{lk} + (C'^2_{ik} - C'^2_{ki}) C'_{li} C'_{kl}. \end{cases}$$

„Damit ist die numerische Identität aufgestellt, welche den Ausdruck A_i (I.) *mit den sechs Ausdrücken* C' (24.) *verknüpft.“*

Aus der Definition (I.) der A_i ergeben sich dann aber auch sofort die Werthe der $\cos \alpha$ als numerischer algebraischer Functionen der C', nämlich:

$$(28.) \qquad \cos^2 \alpha_i = \frac{(\cos a_i - \cos a_k \cos a_l - 2 A_i)^2}{(1 - \cos^2 a_k)(1 - \cos^2 a_l)},$$

wo nur noch für die $\cos a$ und A_i ihre Werthe aus (26.) resp. (27.) zu substituiren sind. Damit hat man das Ergebniss:

„Ist $G(a, \alpha) = 0$ *irgend eine Formel der sphärischen Trigonometrie, so lässt sich auf Grund der Formeln* (26.) (28.) *die numerische Identität angeben, welche den Ausdruck* $G(a, \alpha)$ *mit den sechs Ausdrücken* C' (24.) *verknüpft, wo die Gleichungen* $C' = 0$ *mit den Gleichungen* $C = 0$ (9.) *äquivalent sind.“*

16. Als Beispiel diene der Sinussatz.

Die Identität (II.) nimmt nach Einsetzung der Werthe (2.) für die L und mit Berücksichtigung von (III.) die einfachere Gestalt an:

$$(\text{II}'.) \qquad B_l \equiv -(C'^2_{ik} - C'^2_{ki}) \cos a_i C'_{ik} - \cos a_k C'_{ki}.$$

Mit Benutzung von (26.) ergiebt sich bei geeigneter Anordnung:

$$(29.) \quad \begin{cases} (B_l + C'^2_{ik} - C'^2_{ki})(C'_{ik} C'_{kl} C'_{li} - C'_{ki} C'_{il} C'_{lk}) \\ \equiv (C'_{ik} C'_{il} - C'_{kl} C'_{ki})^2 - (C'_{ik} C'_{il} - C'_{kl} C'_{ki})(C'^2_{ik} - C'^2_{ki}) - (C'_{li} C'^2_{ik} - C'_{lk} C'^2_{ki})(C'_{li} - C'_{lk}). \end{cases}$$

17. Es darf indessen nicht verschwiegen werden, dass diesen, mit Hülfe der C' (24.) hergestellten numerischen Identitäten eine Unvollkommenheit anhaftet, insofern sie im Grenzfall der ebenen Trigonometrie bedeutungslos werden. Denn C_{ik} fällt dann zusammen mit C_{ki}, und also auch C'_{ik} mit C'_{ki}.

Bei den Formeln des § I. lässt sich dagegen der erforderliche Grenzübergang stets leicht vollziehen, und das Gleiche würde auch bei den am Schluss von No. 14 angedeuteten numerischen Identitäten stattfinden.

Clausthal, 11. Januar 1895.

Ueber Näherungswerthe und Kettenbrüche.

(Von Herrn *K. Th. Vahlen.*)

I.

Ordnet man alle positiven, echten oder unechten, irreductibeln Brüche, deren Zähler und Nenner eine gegebene Grenze N nicht übersteigen, nach der Grösse, so fällt eine gegebene positive gebrochene Zahl w im allgemeinen zwischen zwei von ihnen, $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$. Dieselben haben die sie bestimmende Eigenschaft, dem Werthe w so nahe zu kommen, als es mit Verhältnissen von die Grenze N nicht überschreitenden Zahlen überhaupt möglich ist, und sollen deshalb „Näherungswerthe" von w genannt werden.

Wächst N, so erhält man zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gelegene, also in der Form $\frac{ma+nc}{mb+nd}$ (m, n positiv, theilerfremd) darstellbare Näherungswerthe von w; zunächst den mit kleinstem Zähler und Nenner $\frac{a+c}{b+d}$, der aus $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ „componirt" genannt werden soll. So ergiebt sich der Satz:

1. *Von $\frac{1}{0}$ und $\frac{0}{1}$ ausgehend erhält man nach und nach alle echten und unechten Brüche, indem man zwischen je zwei auf einander folgende den componirten einschaltet. Componirt man nur immer diejenigen zwei, zwischen denen jedesmal w liegt, so erhält man alle Näherungswerthe von w.*

Aus diesem folgt sofort der Satz von *Cauchy* *):

2. *In der nach der Grösse geordneten Reihe von Brüchen, deren Zähler und Nenner eine Zahl N nicht überschreiten, besteht zwischen je zwei auf einander folgenden $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ die Beziehung:* $|ad-bc| = 1$.

Denn diese Eigenschaft ist bei den Ausgangsbrüchen $\frac{1}{0}$ und $\frac{0}{1}$ vorhanden, und bleibt bei der Composition erhalten.

*) *Cauchy,* Démonstration d'un théorème curieux sur les nombres (Extrait du Bulletin de la société philomatique). Exercices de mathématiques Bd. 1 pag. 114—116.

Umgekehrt, sind $\frac{a}{b}, \frac{e}{f}, \frac{c}{d}$ drei auf einander folgende Brüche einer *Farey*schen Reihe, wie wir eine Reihe der in Satz 2. betrachteten Art nach Herrn *Hurwitz'* *) Vorgang nennen wollen, so folgt aus: $|af-be|=1$ und $|ed-fc|=1$, dass $\frac{e}{f}=\frac{a+c}{b+d}$, also der zuerst von *Cauchy* a. a. O bewiesene *Farey*sche**) Satz:

3. *In einer Fareyschen Reihe ist jeder Bruch aus den beiden benachbarten componirt.*

Die Ausdehnung der vorstehenden Sätze von Zahlenpaaren (a, b) auf Zahlentripel (a, b, c) ist leicht.

Die vorliegende Arbeit, die im Wesentlichen vollendet war, als ich die beiden genannten Arbeiten von Herrn *Hurwitz* kennen lernte, hat mit denselben zwar den Ausgangspunkt, die Sätze 1., 2., 3., im weiteren Verlaufe aber wenig gemein.

II.

Es liege w zwischen den beiden in dieser Reihenfolge $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ aufeinanderfolgend erhaltenen Näherungswerthen. Dann folgt aus

$$\left|\frac{a}{b}-w\right| < \left|\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right| \quad \text{d. h.} \quad < \frac{1}{bd},$$

dass, da $b < d$,

$$\left|\frac{a}{b}-w\right| < \frac{1}{b^2}$$

ist. Nennen wir demnach einen Näherungswerth $\frac{a}{b}$ „Haupt- oder Nebennäherungswerth", je nachdem sein absoluter Fehler $\left|\frac{a}{b}-w\right|$ kleiner oder grösser als das reciproke Nennerquadrat ist, so besteht der Satz:

4. *Von zwei auf einander folgenden, w einschliessenden Näherungswerthen ist jedenfalls derjenige mit kleinerem Nenner ein Hauptnäherungswerth.*

Nennen wir ferner einen Hauptnäherungswerth „singulär oder ordinär",

*) *Hurwitz*, Ueber die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche. Mathem. Annalen Bd. 44. Ueber die Reduction der binären quadratischen Formen. Mathem. Annalen Bd. 45.

**) *Farey*, On a curious property of vulgar fractions. Philosophical Magazine Bd. 47, pag. 385. Anonym, On vulgar fractions. Philosophical Magazine Bd. 48, pag. 204.

je nachdem sein absoluter Fehler kleiner oder grösser als das halbe reciproke Nennerquadrat ist, so folgt aus der Identität:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{d}\right)^2+\left|\frac{a}{b}-w\right|-\frac{1}{2b^2}+\left|w-\frac{c}{d}\right|-\frac{1}{2d^2} = 0,$$

dass entweder $\left|\frac{a}{b}-w\right| < \frac{1}{2b^2}$ oder $\left|w-\frac{c}{d}\right| < \frac{1}{2d^2}$ ist, also der Satz:

5. *Von zwei auf einander folgenden, w einschliessenden Näherungswerthen ist jedenfalls einer singulär.*

Nehmen wir $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ an, so können wir diese beiden Sätze in der Ungleichungskette zusammenfassen:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}+\frac{1}{d^2} > \frac{c}{d}+\frac{1}{2d^2} > \frac{a}{b}-\frac{1}{2b^2} > \frac{c}{d} > \frac{a}{b}-\frac{1}{b^2}.$$

6. *Die nach $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ zu erhaltenden Näherungswerthe $\frac{e}{f}=\frac{a+c}{b+d}$, u. s. w. können nicht alle mit $\frac{c}{d}$ $\left(\text{oder mit } \frac{a}{b}\right)$ auf derselben Seite von w liegen.*

Denn die Reihe der Brüche $\frac{a+c}{b+d}, \frac{2a+c}{2b+d}, \ldots, \frac{na+c}{nb+d}, \ldots$ nähert sich unbegrenzt dem $\frac{a}{b}$, muss also bei genügend grossem n den von $\frac{a}{b}$ verschiedenen Werth w überschreiten.

Ordnet man also die Näherungswerthe $\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \ldots, \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \ldots$ von w in der Reihenfolge, in der man sie durch Composition erhält, so theilen sich dieselben in abwechselnde Gruppen von Näherungswerthen mit positiven und von solchen mit negativen Fehlern. Die Reihe der Vorzeichen der Fehler: $+, -, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ gestattet die successive Berechnung der Näherungswerthe, ist daher charakteristisch für w und von Herrn *Hurwitz* „Charakteristik" von w genannt worden.

Den Satz 6. können wir nunmehr folgendermassen aussprechen und ergänzen:

7. *Die auf $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ folgenden Näherungswerthe nähern sich solange immer dem einen dieser beiden Brüche als in der Charakteristik von der betreffenden Stelle ab nur Zeichenfolgen stattfinden.*

8. *Die auf $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ folgenden Näherungswerthe nähern sich solange einem der beiden Werthe, in denen das Intervall $\frac{a}{b}\cdots\frac{c}{d}$ nach dem goldenen*

Schnitt getheilt wird, als in der Charakteristik von der betreffenden Stelle ab nur Zeichenwechsel stattfinden.

Aus der Identität:

$$\left(\frac{e}{f}-w\right)+\left(w-\frac{c}{d}-\frac{1}{d^2}\right)+\frac{b}{fd^2} = 0$$

folgt, dass $\frac{e}{f}-w$ und $w-\frac{c}{d}-\frac{1}{d^2}$ nicht gleichzeitig positiv sein können, also der Satz:

9. *Auf einen Nebennäherungswerth folgt eine Zeichenfolge; einem Zeichenwechsel geht ein Hauptnäherungswerth vorher.*

Ebenso folgt aus:

$$\left(\frac{e}{f}-w\right)+\left(w-\frac{c}{d}-\frac{1}{2d^2}\right)-\frac{d-b}{2fd^2} = 0,$$

dass $\frac{e}{f}-w$ und $w-\frac{c}{d}-\frac{1}{2d^2}$ nicht gleichzeitig negativ sein können, also:

10. *Auf einen singulären Hauptnäherungswerth folgt ein Zeichenwechsel; einer Zeichenfolge kann ein ordinärer aber kein singulärer Hauptnäherungswerth vorhergehen.*

Daraus ergiebt sich leicht:

11. *Die Anzahl der singulären Hauptnäherungswerthe ist höchstens gleich der Anzahl der Wechsel in der Charakteristik, und mindestens gleich der Anzahl, die man erhält, wenn man je k unmittelbar auf einander folgende Wechsel nur als* $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ *Wechsel zählt.*

Es erübrigt den Fall zu betrachten, dass auf einen ordinären Hauptnäherungswerth kein Wechsel erfolgt.

Seien $\frac{e}{f}, \frac{g}{h}, \frac{i}{k}, \ldots$ die zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ successive einzuschaltenden Näherungswerthe, welche mit $\frac{c}{d}$ auf derselben Seite von w liegen, sodass

$$\frac{a}{b} > w > \cdots > \frac{i}{k} > \frac{g}{h} > \frac{e}{f} > \frac{c}{d}.$$

Dann findet man leicht, indem man:

$$\frac{e}{f} = \frac{a+c}{b+d}, \quad \frac{g}{h} = \frac{2a+c}{2b+d}, \quad \frac{i}{k} = \frac{3a+c}{3b+d}, \quad \ldots$$

setzt, dass

$$\cdots > \frac{i}{k}+\frac{1}{k^2} > \frac{g}{h}+\frac{1}{h^2} > \frac{e}{f}+\frac{1}{f^2}$$

ist; also:

12. *Ist von den auf $\frac{c}{d}$ folgenden, mit $\frac{c}{d}$ auf derselben Seite von w gelegenen Näherungswerthen einer ein Hauptnäherungswerth, so sind es auch alle darauf folgenden.*

Dagegen ist:

$$\frac{e}{f}+\frac{1}{f^2} > \text{oder} < \frac{c}{d}+\frac{1}{d^2},$$

je nachdem

$$\frac{\frac{e}{f}-\frac{c}{d}}{\frac{a}{b}-\frac{e}{f}} > \text{oder} < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

ist; also:

13. *Wenn $\frac{c}{d}$ ein Hauptnäherungswerth ist, so muss auch $\frac{e}{f}$ ein solcher sein, oder braucht $\frac{e}{f}$ kein solcher zu sein, je nachdem das Intervall $\frac{c}{d}\cdots\frac{a}{b}$ in dem Bruche $\frac{e}{f}$ nach einem das Verhältniss des goldenen Schnitts übertreffenden oder nicht erreichenden Verhältniss getheilt wird.*

III.

Aus $\frac{1}{0}$ und $\frac{0}{1}$ bildet man durch successive Composition die Näherungswerthe: 1, 2, 3, ..., g_0 von w, wenn g_0 die w unmittelbar vorhergehende oder folgende ganze Zahl ist.

Liegt also w zwischen g_0 und $g_0-\varepsilon_1$, $(\varepsilon_1=\pm 1)$, so schaltet man zwischen diesen die Näherungswerthe ein:

$$\frac{2g_0-\varepsilon_1}{2},\quad \frac{3g_0-\varepsilon_1}{3},\quad \ldots,\quad \frac{g_1g_0-\varepsilon_1}{g_1},$$

wo g_1 diejenige ganze Zahl ist, für welche w zwischen $\frac{g_1g_0-\varepsilon_1}{g_1}$ und $\frac{(g_1-\varepsilon_2)g_0-\varepsilon_1}{g_1-\varepsilon_2}$ liegt; $\varepsilon_2=\pm 1$. Zwischen diesen beiden $g_0-\frac{\varepsilon_1}{g_1}$ und $g_0-\frac{\varepsilon_1}{g_1-\varepsilon_2}$ schaltet man ferner ein:

$$\frac{(2g_1-\varepsilon_2)g_0-2\varepsilon_1}{2g_1-\varepsilon_2},\quad \frac{(3g_1-\varepsilon_2)g_0-3\varepsilon_1}{3g_1-\varepsilon_2},\quad \ldots,\quad \frac{(g_2g_1-\varepsilon_2)g_0-g_2\varepsilon_1}{g_2g_1-\varepsilon_2},$$

so dass w zwischen:

$$g_0-\cfrac{\varepsilon_1}{g_1-\cfrac{\varepsilon_2}{g_2}}\quad \text{und}\quad g_0-\cfrac{\varepsilon_1}{g_1-\cfrac{\varepsilon_2}{g_2-\varepsilon_3}}$$

liegt; $\varepsilon_3=\pm 1$. U. s. w., also:

14. *Die Bildung der Näherungswerthe von w durch Composition stimmt überein mit der Entwickelung von w in einen Kettenbruch:*

$$g_0 - \cfrac{\varepsilon_1}{g_1 - \cfrac{\varepsilon_2}{g_2 - \cdots - \cfrac{\varepsilon_\nu}{g_\nu}}}, \qquad (\varepsilon_i = \pm 1,\ i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

wobei es gleichgültig ist, ob man bei den successiven Divisionen den jedesmaligen Quotienten g_i so wählt, dass der Rest:

$$-\cfrac{\varepsilon_{i+1}}{g_{i+1} - \cdots - \cfrac{\varepsilon_\nu}{g_\nu}}$$

positiv, oder so, dass er negativ ist).*

Jede der auf diese Weise möglichen Kettenbruchentwickelungen von w liefert alle Näherungswerthe von w, nämlich

$$g_0 - \cfrac{\varepsilon_1}{g_1 - \cdots - \cfrac{\varepsilon_i}{g_i'}}, \qquad \left(\begin{matrix} i = 0, 1, \ldots, \nu \\ g_i' = 1, 2, \ldots, g_i \end{matrix}\right)$$

und jeden nur einmal, wenn man für diejenigen g_i, für welche $\varepsilon_i = +1$ ist, den Werth $g_i' = 1$ auslässt. Also:

15. *Für sämmtliche Kettenbruchentwickelungen einer positiven gebrochenen Zahl w ist die Summe der Theilnenner, vermindert um die Anzahl der negativen Reste, constant, nämlich gleich der Anzahl der Näherungswerthe von w, dieses selbst mitgezählt,* 0 *und* ∞ *nicht mitgezählt.*

Ebenso ergiebt sich:

16. *Für alle Kettenbruchentwickelungen von w ist $\sum_{i=0}^{\nu} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_i g_i$, wo g_i für ein positives ε_i um eine, für ein positives ε_{i+1} um zwei Einheiten zu verringern, für g_ν, $g_\nu - 1$ zu setzen ist, constant, nämlich gleich der Anzahldifferenz der oberen und unteren Näherungswerthe von w.*

---

*) Auf derartige Kettenbrüche scheint *Wallis* zuerst aufmerksam gemacht zu haben (vgl. *Lagranges* Zusätze zu *Eulers* Algebra, Cap. VIII, § 87.) Kettenbrüche mit durchgehends negativen Resten sind von *Möbius* und *Stern* betrachtet worden: *Möbius*, Beiträge zu der Lehre von den Kettenbrüchen, nebst einem Anhange dioptrischen Inhalts. Dieses Journal, Bd. 6, pag. 215—243. *Möbius'* Gesammelte Werke, Bd. 4, pag. 503. *Stern*, über die Eigenschaften der periodischen negativen Kettenbrüche, welche die Quadratwurzel aus einer ganzen positiven Zahl darstellen. Abhandlungen der Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen Bd. 12. — Kettenbrüche, in denen die Reste absolut kleiner als $\frac{1}{2}$ sind, finden sich bei *Minnigerode*, über eine neue Methode die *Pell*sche Gleichung aufzulösen. Göttinger Nachrichten 1873, und bei *Hurwitz*, über eine besondere Art der Kettenbruchentwickelung reeller Grössen. Acta mathematica, Bd. 12, pag. 367.

Es sei $f\left(\frac{m}{n}\right)$ die Anzahl der Kettenbruchentwickelungen von $\frac{m}{n}$. Nun besitzt $\frac{1}{n}$ ausser der Entwickelung $\frac{1}{n}$ noch die $f\left(\frac{1}{n-1}\right)$ Entwickelungen, die aus:

$$\frac{1}{n} = 1 - \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{n-1}}$$

folgen, indem man für $\frac{1}{n-1}$ seine $f\left(\frac{1}{n-1}\right)$ Entwickelungen einsetzt. Also ist: $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{n-1}\right) = \text{etc.} = n$.

Ferner folgt für den echten Bruch $\frac{m}{n}$ aus:

$$\frac{m}{n} = \cfrac{1}{\left[\frac{n}{m}\right]+\cfrac{r}{m}} \quad \text{und} \quad \frac{m}{n} = 1 - \cfrac{1}{\left[\frac{n}{n-m}\right]+\cfrac{s}{n-m}},$$

dass:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{r}{m}\right) + f\left(\frac{s}{n-m}\right).$$

Wendet man auf $f\left(\frac{r}{m}\right)$ und $f\left(\frac{s}{n-m}\right)$ dieselbe Formel an und fährt so fort, bis sämmtliche Zähler gleich Eins sind, so folgt aus der Beobachtung, dass die Summe der Nenner stets gleich n bleibt, die Gleichung:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = n,$$

also:

17. *Jeder irreductible Bruch* $\frac{m}{n}$ *besitzt soviel Kettenbruchentwickelungen als sein Nenner Einheiten enthält.*

Jede Kettenbruchentwickelung von $\frac{m}{n}$:

$$g_0 - \cfrac{\varepsilon_1}{g_1 - \ddots - \cfrac{\varepsilon_\nu}{g_\nu}}, \qquad (g_\nu > 2)$$

liefert eine Entwickelung für den vorhergehenden Näherungswerth $\frac{m'}{n'}$:

$$g_0 - \cfrac{\varepsilon_1}{g_1 - \ddots - \cfrac{\varepsilon_\nu}{g_\nu - 1}}.$$

Aber je zwei Entwickelungen:

$$g_0 - \cdot \cdot \cdot - \frac{\varepsilon_{\nu-1}}{g_{\nu-1} - \frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad g_0 - \cdot \cdot \cdot - \frac{\varepsilon_{\nu-1}}{g_{\nu-1} - 1 - \frac{1}{2}}$$

ergeben zusammen nur eine Entwickelung von $\frac{m'}{n'}$:

$$g_0 - \cdot \cdot \cdot - \frac{\varepsilon_{\nu-1}}{g_{\nu-1}};$$

also:

18. *Die Anzahl der Entwickelungen von $\frac{m}{n}$, wenn man je zwei zusammengehörige mit $\pm\frac{1}{2}$ schliessende nur als eine zählt, ist gleich dem Nenner des vorhergehenden Näherungswerthes.*

Dieselbe Ueberlegung führt zu einer recurrenten Bestimmung der Anzahlen von Entwickelungen von gleichviel Gliedern. Ist nämlich α_i die Anzahl der i-gliedrigen Entwickelungen von $\frac{m}{n}$, $2\beta_i$ die Anzahl derselben welche mit $\frac{1}{2}$ schliessen, und setzt man $\alpha_i = 2\beta_i + \gamma_i$, so ist:

$$\beta_i + \gamma_{i-1} = \alpha'_{i-1},$$
$$\beta_i - \gamma_{i-1} = \pm\gamma'_{i-1},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem vor $\frac{m'}{n'}$ eine Folge oder ein Wechsel stattfindet, und α'_{i-1}, γ'_{i-1} die entsprechenden Anzahlen für $\frac{m'}{n'}$ sind.

Die Zahlen α_i sind ausser durch die Gleichung $\sum_i \alpha_i = n$ noch durch eine andere verbunden.

Ist ϱ die höchste in den n Entwickelungen von $\frac{m}{n}$ vorkommende Gliederanzahl, so sind von den 2^ϱ mit ϱ Vorzeichen, $+$ oder $-$, möglichen Combinationen, jeder i-gliedrigen Entwickelung diejenigen $2^{\varrho-i}$ zuzuordnen, welche in ihren i ersten Vorzeichen mit denen der i Glieder der betrachteten Entwickelung übereinstimmen. Also:

19. *Zwischen den Anzahlen α_i $(i = 0, 1, \ldots, \varrho)$ von i-gliedrigen Entwickelungen eines Bruches besteht die Relation:*

$$\sum_{i=0}^{\varrho} \frac{\alpha_i}{2^i} = 1.$$

Wir betrachten jetzt irgend eine der Entwickelungen von w. Ist

der auf g_i folgende Rest, absolut, grösser als $\frac{1}{2}$, so hat der Kettenbruch an der betreffenden Stelle eine der beiden Formen:

$$g_i - \cfrac{\varepsilon_{i+1}}{1 + \cfrac{1}{g_{i+2} - \cfrac{\varepsilon_{i+3}}{g_{i+3} - \ddots}}} \quad \text{oder} \quad g_i - \cfrac{\varepsilon_{i+1}}{2 - \cfrac{1}{g_{i+2} - \cfrac{\varepsilon_{i+3}}{g_{i+3} - \ddots}}}.$$

Ist diese Stelle in der Entwickelung die letzte, bei welcher ein Rest, absolut, grösser als $\frac{1}{2}$ auftritt, so können wir im ersten Falle der betr. Stelle die Form geben:

$$(g_i - \varepsilon_{i+1}) + \cfrac{\varepsilon_{i+1}}{(g_{i+2}+1) - \cfrac{\varepsilon_{i+3}}{g_{i+3} - \ddots}},$$

im zweiten Falle die Form:

$$(g_i - \varepsilon_{i+1}) + \cfrac{\varepsilon_{i+1}}{2 + \cfrac{1}{(g_{i+2}-1) - \cfrac{\varepsilon_{i+3}}{g_{i+3} - \ddots}}}.\text{*)}$$

Ist nun $g_{i+2} = 2$, also $\varepsilon_{i+3} = -1$, so wenden wir auf: $2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{g_{i+3} - \ddots}}$ die Umformung des ersten Falles an; ist aber $g_{i+2} = 3$ und $\varepsilon_{i+3} = +1$, so wenden wir auf: $2 + \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{g_{i+3} - \ddots}}$ die nämliche Umformung an, u. s. w. Dadurch wird in beiden Fällen erreicht, dass nach dem i-ten Gliede nur noch Reste, absolut, kleiner als $\frac{1}{2}$ auftreten. Die Entwickelung wird dabei eventuell um einige Glieder verkürzt, also:

20. *Unter den Entwickelungen von w giebt es keine kürzere als die, bei welcher die Divisionen nach dem kleinsten Reste ausgeführt sind***).

Berücksichtigt man, dass die Reihe der Näherungswerthe:

$$g_0 - \cfrac{\varepsilon_1}{g_1 - \ddots - \cfrac{\varepsilon_i}{g_i'}} \qquad \binom{i = 0, 1, \ldots, \mu}{g_i' = (1), 2, \ldots, g_i}$$

---

*) Aehnliche Umformungen finden sich schon bei *Lagrange, Möbius, Stern* (locis citatis).

**) *Kronecker* hätte in seinen Vorlesungen über Zahlentheorie vermuthungsweise den Satz ausgesprochen: Die Entwickelung nach kleinsten Resten sei die kürzeste, der also im Obigen seine genauere Fassung und seine Bestätigung findet.

für $\varepsilon_{i+1} = -1$ hinter, für $\varepsilon_{i+1} = +1$ vor und hinter dem Näherungswerth: $g_0 - \frac{\varepsilon_1}{g_1 - \cdots \mp \frac{\varepsilon_i}{g_i}}$ einen Wechsel hat, so folgt aus dem Vorstehenden und dem Satz 5:

21. *Die Anzahl der singulären Hauptnäherungswerthe von w ist nicht kleiner als die Gliederanzahl der Entwickelung nach kleinsten Resten und nicht grösser als dieselbe Anzahl vermehrt um die Anzahl der negativen Reste.*

22. *Diejenigen beiden Kettenbruchentwickelungen eines echten Bruches w sind am längsten, bei welchen die Divisionen nach dem grössten Reste ausgeführt sind. Die eine schliesst mit $1+\frac{1}{2}$, die andere mit $2-\frac{1}{2}$.*

Denn, da nur die Theilnenner $1+$ und $2-$ auftreten, entspricht jedem Gliede ein und nur ein Näherungswerth. Eine längere Entwickelung ergäbe mehr, eine ebensolange nur dann nicht mehr Näherungswerthe, wenn sie nur die Theilnenner $1+$ und $2-$ enthielte. Eine solche stimmt mit einer der beiden längsten Entwickelungen überein.

Bezeichnen wir an irgend einer Stelle der längsten Entwickelungen den Rest mit x, so hat dieselbe an der betr. Stelle entweder die Form $\frac{1}{1+x}$ oder die Form $\frac{1}{1+(1-x)}$. Daraus ist zu folgern:

30. *Durch blosse Anwendung der beiden Operationen $\frac{1}{1+x}$ und $1-x$ erhält man, von $x=0$ ausgehend, nach und nach alle positiven echten Brüche und jeden nur einmal.*

Der Zusammenhang dieses Verfahrens mit dem der Composition der Brüche (Satz 1.) ist leicht ersichtlich.

Ist $|ad-bc| = 1$, $d > c > a$, $d > b > a$, so ist entweder $\frac{a}{b}$ oder $\frac{c-a}{d-b}$ der in der Reihe der Näherungswerthe dem $\frac{c}{d}$ unmittelbar vorhergehende. Entwickelt man nun $\frac{c}{d}$ in die beiden längsten Kettenbrüche:

$$g_0 - \frac{\varepsilon_1}{g_1 - \cdots - \frac{\varepsilon_{\varrho-1}}{1+\frac{1}{2}}} \quad \text{und} \quad g_0 - \frac{\varepsilon_1}{g_1 - \cdots - \frac{\varepsilon_{\varrho-1}}{2-\frac{1}{2}}},$$

so ist für $x = 0, 1, \infty$ also identisch entweder:

$$\frac{c-ax}{d-bx} = g_0 - \frac{\varepsilon_1}{g_1 - \cdots - \frac{\varepsilon_{\varrho-1}}{1+\frac{1}{2-x}}} \quad \text{oder:} \quad = g_0 - \frac{\varepsilon_1}{g_1 - \cdots - \frac{\varepsilon_{\varrho-1}}{2-\frac{1}{2-x}}},$$

je nachdem $\frac{c-a}{d-b}$ oder $\frac{a}{b}$ der dem $\frac{c}{d}$ vorhergehende Näherungswerth ist. Also:

23. *Die eindeutige Decomposition einer lineargebrochenen unimodularen Substitution* $\frac{c-ax}{d-bx}$ *in die beiden* $1-x$ *und* $\frac{1}{1+x}$ *wird durch eine der beiden längsten Kettenbruchentwickelungen von* $\frac{c}{d}$ *geliefert, je nachdem* b *grösser oder kleiner als* $d-b$ *ist.*

Auch mit Hülfe der Charakteristik von $\frac{c}{d}$ ist die Decomposition leicht zu vollziehen, indem einem Zeichenwechsel die Anwendung der Substitution $\frac{1}{1+x}$, einer Zeichenfolge die Anwendung der aus $1-x$ und $\frac{1}{1+x}$ zusammengesetzten $\frac{1}{2-x}$ entspricht. Dabei ist an vorletzter Stelle eine Folge oder ein Wechsel anzunehmen, je nachdem $\frac{c-a}{d-b}$ oder $\frac{a}{b}$ der vorletzte Näherungswerth ist.

Für die beliebige Substitution $\frac{c-ax}{d-bx}$ $(|ad-bc| = D)$ ergiebt sich ebenso leicht:

$$\frac{c-ax}{d-bx} = g_0 - \cfrac{\varepsilon_1}{g_1 - \cdots - \cfrac{\varepsilon_{\varrho-1}}{g_{\varrho-1} - \cfrac{\gamma-\alpha x}{\delta}}},$$

also die Decomposition in die Substitutionen $1-x$, $\frac{1}{1+x}$ und $\frac{\gamma-\alpha x}{\delta}$, wo $\gamma < \delta$, $\alpha\delta = D$ ist. Die Anzahl dieser reducirten Substitutionen $\frac{\gamma-\alpha x}{\delta}$ $(\gamma < \delta, \alpha\delta = D)$ ist offenbar gleich der Divisorensumme von D.

Zur Theorie der periodischen Kettenbrüche, welche sich zweckmässig an die Entwickelung der lineargebrochenen Functionen in Kettenbrüche anschliessen lässt, sei hier nur bemerkt, dass sich aus einer periodischen Charakteristik durch Beachtung der im Folgenden gegebenen Theilungsregeln alle zugehörigen periodischen Kettenbrüche leicht entwickeln lassen.

Jeder Kettenbruchentwickelung von w entspricht eine gewisse Theilung der Charakteristik, indem man in derselben die Zeichen der zu jedem Nenner g_i gehörenden Näherungswerthe: $g_0 - \cfrac{\varepsilon_1}{g_1 - \cdots - \cfrac{\varepsilon_i}{g'_i}}$ $(g'_i = (1), 2, \ldots, g_i)$

zu einer Gruppe zusammenfasst. Die Theilstriche, durch welche die Charakteristik auf diese Weise in Gruppen zerlegt wird, dürfen aber nicht beliebig angebracht werden, sondern Folgendes ist dabei zu beachten.

Fällt in einen Wechsel kein Theilstrich, so ist an nächster Stelle ein Theilstrich zu machen. Fällt dieser in eine Folge, so ist in dieser noch ein, oder an nächster Stelle ein Theilstrich zu machen; u. s. w. Andere, als die so entstehenden Theilstriche dürfen in keiner Folge vorkommen.

Es entsprechen also die Theilungen:

$\cdots+|-\cdots,\ \cdots+-|+\cdots,\ \cdots+-||--\cdots,\ \cdots+-|-|+\cdots,\ \cdots+-|-||--\cdots$ u. s. w.

bezw. den Entwickelungen:

$$\cdots\frac{1}{g+\frac{1}{h\ldots}},\quad \cdots\frac{1}{g-\frac{1}{h\ldots}}\ \left(\frac{1}{h}<\frac{1}{2}\right),\quad \cdots\frac{1}{g-\frac{1}{1+\cdots}},$$

$$\cdots\frac{1}{g-\frac{1}{2-\frac{1}{h\ldots}}},\quad \cdots\frac{1}{g-\frac{1}{2-\frac{1}{1+\cdots}}}\quad \text{u. s. w.}$$

Den beiden längsten Entwickelungen entspricht diejenige Theilung der Charakteristik, bei welcher in jeden Wechsel und jede Folge ein Theilstrich fällt; ausgenommen die Wechsel vor einer Folge, welche keinen, die Folgen vor einem Wechsel, welche zwei Theilstriche erhalten. Die Theilung kann mit $|++$ oder mit $+|+$ schliessen.

Den kürzesten Entwickelungen entsprechen diejenigen Theilungen der Charakteristik, bei welchen je k_i auf einander folgende Wechsel nur $\left[\frac{k_i+1}{2}\right]$ Theilstriche, Folgen gar keine erhalten. Die Anzahl der kürzesten Entwickelungen ist daher $\prod_i\left[\frac{k_i+1}{2}\right]$.

Wir wollen die Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ die Theilungszahlen der Charakteristik, und Charakteristiken mit denselben Theilungszahlen ähnlich nennen. Da die Summe der Theilungszahlen gleich dem Nenner des Bruches ist, so gehören ähnliche Charakteristiken zu Brüchen desselben Nenners. Bei den Charakteristiken echter Brüche lassen wir die drei ersten Zeichen $+-+$ fort; dann besteht der Satz:

24. *Die Charakteristiken zweier sich zu Eins ergänzenden echten Brüche sind ähnlich und zwar die Zeichen der einen denen der andern der Reihe nach entgegengesetzt.*

Sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{d}{b}$ echte Brüche, $|ad-bc|=1$, so folgt aus:

$$y=\frac{ax-c}{bx-d}=\cfrac{1}{g_0-\cfrac{1}{g_1-\ddots-\cfrac{1}{g_\nu-\cfrac{1}{x}}}}$$

durch Umkehrung

$$x=\frac{dy-c}{by-a}=\cfrac{1}{g_\nu-\cfrac{1}{g_{\nu-1}-\ddots-\cfrac{1}{g_0-\cfrac{1}{y}}}},$$

also aus der ersten Entwickelung für $x=\infty$, aus der zweiten für $y=\infty$:

$$\frac{a}{b}=\cfrac{1}{g_0-\ddots-\cfrac{1}{g_\nu}} \quad \text{und} \quad \frac{d}{b}=\cfrac{1}{g_\nu-\ddots-\cfrac{1}{g_0}};$$

mithin:

25. ***Die Charakteristiken zweier irreductiblen echten Brüche desselben Nenners, deren Zähler, absolut, reciprok sind in Bezug auf den Nenner als Modul, stehen in der Beziehung zu einander, dass die Zeichen der einen in umgekehrter Folge mit denen der anderen oder den entgegensetzten der anderen übereinstimmen.***

Auf die Eigenschaften der zu ähnlichen Charakteristiken gehörigen Brüche, z. B. $\frac{a}{b}$ und $\frac{d}{b}$, wenn $ad\equiv\pm 1 \pmod{b}$, und der zu Brüchen desselben Nenners gehörenden Charakteristiken soll später eingegangen werden.

Berlin, im November 1894.

Anwendung der *Grassmann*schen Methoden auf die Theorie der Curven und Flächen zweiten Grades.

(Von Herrn *Emil Müller* in Königsberg i. Pr.)

Herr *Caspary* hat im 92. Bande dieses Journals (S. 123 flgd.) die *Grassmann*schen Methoden zur Umformung einiger Determinanten, welche in der Lehre von den Kegelschnitten auftreten, angewandt, insbesondere die von *Grassmann* im 84. Bd. dieses Journals S. 277 gelehrte äussere Multiplication algebraischer Producte von Punkten und Geraden das erste Mal benutzt. Bei dem Versuche, seine interessante Grundgleichung (68.) ohne das umständliche Zurückgehen auf die ursprünglichen Einheiten abzuleiten, wurde ich auf die Beziehung geführt, dass das äussere Product der sechs aus drei beliebigen Punkten gebildeten algebraischen Producte zweiten Grades einer Potenz des äusseren Productes dieser drei Punkte gleich ist*). Mit Hülfe dieser Beziehung gelang es mir, indem ich durchgehends die algebraischen Grössen zweiter Ordnung (algebraische Producte zweiten Grades von Geradenstücken) als äussere Producte fünfter Stufe von algebraischen Grössen zweiter Klasse (algebraische Producte zweiten Grades von Punkten) betrachtete, obige Grundgleichung sowie die anderen von Herrn *Caspary* angegebenen Umformungen des äusseren Productes von sechs Punktquadraten bedeutend einfacher abzuleiten.

Dieselben Betrachtungen liessen sich dann unmittelbar auf die algebraischen Producte zweiten Grades von Punkten und Ebenenstücken anwenden und ergaben hier Beziehungen, aus denen die von Herrn *Hunyady* a. a. O. gefundenen Umformungen des äusseren Productes von 10 Punktquadraten ohne Hülfssätze aus der Theorie der Flächen zweiten Grades folgten.

---

*) Diese Beziehung ist das Analogon zu der von *Hunyady* in seinem Aufsatze „Beitrag zur Theorie der Flächen 2. Grades", dieses Journ. Bd. 89, S. 47 flgd. abgeleiteten Gleichung (15.).

Von Interesse dürften die vorangeschickten vier allgemeinen Sätze der Ausdehnungslehre sein, von denen die ersten beiden sich wohl bei *Grassmann**) vorfinden aber meines Wissens bis jetzt diese Deutung nicht erfahren haben, und deren Beweis bei *Grassmann* ziemlich umständlich ist.

Im Nachfolgenden bezeichnen $a, b, c, d, \ldots$ gewöhnlich Punkte, $A, B, C, D, \ldots$ Geradenstücke (Linientheile), $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ Ebenenstücke (Flächentheile) und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots$ Zahlen. Ferner sollen die Factoren eines äusseren Productes in eckige Klammern eingeschlossen, aber nur wenn Zweideutigkeiten möglich wären, durch Punkte getrennt werden; algebraische Producte werden durch blosses Nebeneinandersetzen der Factoren angezeigt.

§ 1.

Allgemeine Sätze der Ausdehnungslehre.

I. *Ist in einem Hauptgebiete nter Stufe* $A=[a_1a_2\ldots a_r]$ *ein von Null verschiedenes Product von r Grössen erster Stufe und* $B=[\beta_1\beta_2\ldots\beta_s]$ *ein Product von s Grössen* $(n-1)$*-ter Stufe, so besteht für* $r>s$ *die Gleichung:*

$$[AB] = [A_1B]C_1+[A_2B]C_2+\cdots+[A_pB]C_p,$$

worin $A_1, A_2, \ldots, A_p$ *die äusseren Producte ster Stufe aus den Factoren* $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *und* $C_1, C_2, \ldots, C_p$ *die sie ergänzenden Producte bezeichnen, d. h. die äusseren Producte* $(r-s)$*-ter Stufe aus denselben Factoren, für welche die Gleichungen* $[A_iC_i]=A$ *gelten.*

Um diesen Satz zu beweisen, nehmen wir zu $a_1, a_2, \ldots, a_r$ noch weitere $n-r$ von diesen und unter einander unabhängige Grössen erster Stufe $a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_n$ an und bilden aus den n Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die äusseren Producte $(n-s)$-ter Stufe

$$B_1,\quad B_2,\quad \ldots,\quad B_t;$$

dann ist die gleichstufige Grösse B aus ihnen ableitbar, etwa

$$B = \mathfrak{b}_1B_1+\mathfrak{b}_2B_2+\cdots+\mathfrak{b}_tB_t. \tag{1.}$$

Die Producte B_i müssen mit A mindestens $r-s$ Factoren gemeinsam haben. Sind also $B_1, B_2, \ldots, B_p$ diejenigen der obigen Grössen B_i, welche gerade $r-s$ Factoren mit A gemeinsam haben, $\left(\text{ihre Anzahl ist } p=\binom{r}{r-s}=\binom{r}{s}\right)$, so wird

$$[AB] = \mathfrak{b}_1[AB_1]+\mathfrak{b}_2[AB_2]+\cdots+\mathfrak{b}_p[AB_p]$$

*) Ausdehnungslehre vom Jahre 1862, § 3 No. 172, 175.

sein, da die übrigen Producte, in denen die Factoren A und B_i mehr als $r-s$ Factoren gemeinsam haben, Null sind.

Nun bilde man aus den Factoren $a_1, a_2, \ldots, a_r$ von A die äusseren Producte $s$ter Stufe, $\left(\text{ihre Anzahl ist } \binom{r}{s} = p\right)$ und bezeichne sie mit

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_p,$$

ferner ihre ergänzenden Producte mit

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_p.$$

Da die Grössen $B_1, B_2, \ldots, B_p$ jetzt in der Form

$$B_i = [C_i B_i']$$

sich darstellen lassen, wo B_i' aus jenen $n-r$ Factoren von B_i besteht, die in A nicht vorkommen, so ist

$$[AB_i] = [A_i C_i . C_i B_i'] = [A_i C_i B_i'] C_i{}^{*)} = [AB_i'] C_i,$$

daher

$$(2.) \qquad [AB] = \mathfrak{b}_1[AB_1']C_1 + \mathfrak{b}_2[AB_2']C_2 + \cdots + \mathfrak{b}_p[AB_p']C_p.$$

Zur Bestimmung der Zahlen $\mathfrak{b}_i$ multipliciren wir die Gleichung (1.) mit A_i. Da die Grössen A_i und B_i von ergänzenden Stufenzahlen sind, so kann nur jene der Grössen $B_1, B_2, \ldots, B_t$ mit A_i ein Product von geltendem Werthe liefern, welche alle nicht in A_i vorkommenden Factoren enthält, d. i. $B_i = [C_i B_i']$. Wir erhalten also

$$[A_i B] = \mathfrak{b}_i[A_i C_i B_i'] = \mathfrak{b}_i[AB_i'],$$

wodurch Gleichung (2.) in die zu beweisende Gleichung

$$(3.) \qquad [AB] = [A_1 B]C_1 + [A_2 B]C_2 + \cdots + [A_p B]C_p$$

übergeht.

Der obige Satz gilt auch dann, wenn $a_1, a_2, \ldots, a_r$ Grössen $(n-1)$-ter Stufe und $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ Grössen erster Stufe bezeichnen. Der Gang des Beweises bleibt derselbe.

II. *Unter sonst denselben Annahmen wie in Satz* I. *sei jetzt $s = r$; dann besteht die Gleichung:*

$$[AB] = [a_1 a_2 \ldots a_r . \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_r] = \begin{vmatrix} [a_1\beta_1] & [a_2\beta_1] & \ldots & [a_r\beta_1] \\ [a_1\beta_2] & [a_2\beta_2] & \ldots & [a_r\beta_2] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [a_1\beta_r] & [a_2\beta_r] & \ldots & [a_r\beta_r] \end{vmatrix}.$$

---

*) Vgl. $\mathfrak{A}_1$, § 132. Mit $\mathfrak{A}_1$ soll, wie üblich, *H. Grassmanns* Bearbeitung der Ausdehnungslehre vom Jahre 1844, mit $\mathfrak{A}_2$ jene vom Jahre 1862 bezeichnet werden.

Denn bildet man aus den wie vorher angenommenen Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die äusseren Producte $(n-1)$-ter Stufe

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n,$$

wo α_i alle Factoren mit Ausnahme von a_i und in einer solchen Reihenfolge enthält, dass

$$[a_i\alpha_i] = [a_1 a_2 \ldots a_n]$$

ist, so sind die Grössen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ aus $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ableitbar. Sei also

$$(4.)\qquad \begin{cases} \beta_1 = \mathfrak{b}_{11}\alpha_1 + \mathfrak{b}_{12}\alpha_2 + \cdots + \mathfrak{b}_{1n}\alpha_n, \\ \beta_2 = \mathfrak{b}_{21}\alpha_1 + \mathfrak{b}_{22}\alpha_2 + \cdots + \mathfrak{b}_{2n}\alpha_n, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \beta_r = \mathfrak{b}_{r1}\alpha_1 + \mathfrak{b}_{r2}\alpha_2 + \cdots + \mathfrak{b}_{rn}\alpha_n, \end{cases}$$

so ist

$$(5.)\qquad B = [\beta_1\beta_2\ldots\beta_r] = \begin{vmatrix} \mathfrak{b}_{11} & \mathfrak{b}_{12} & \ldots & \mathfrak{b}_{1r} \\ \mathfrak{b}_{21} & \mathfrak{b}_{22} & \ldots & \mathfrak{b}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{b}_{r1} & \mathfrak{b}_{r2} & \ldots & \mathfrak{b}_{rr} \end{vmatrix} [\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r] + \cdots$$

eine Vielfachensumme der eingewandten kombinatorischen Producte $r$ter Stufe von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Da aber $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ Grössen $(n-1)$-ter Stufe sind, so stellen diese Producte in Bezug auf die Einheiten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Grössen $(n-r)$-ter Stufe dar, von denen mit Ausnahme von $[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r]$ jedes einen der Factoren $a_1, a_2, \ldots, a_r$ enthält. Multiplicirt man daher Gleichung (5.) mit $A = [a_1 a_2 \ldots a_r]$, so sind alle Producte rechts mit Ausnahme des ersten Null, und man erhält

$$[AB] = [a_1 a_2 \ldots a_r . \beta_1\beta_2\ldots\beta_r] = \begin{vmatrix} \mathfrak{b}_{11} & \mathfrak{b}_{12} & \ldots & \mathfrak{b}_{1r} \\ \mathfrak{b}_{21} & \mathfrak{b}_{22} & \ldots & \mathfrak{b}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{b}_{r1} & \mathfrak{b}_{r2} & \ldots & \mathfrak{b}_{rr} \end{vmatrix} [a_1 a_2 \ldots a_r . \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r].$$

Zur Bestimmung der Zahlen $\mathfrak{b}_{ik}$ multipliciren wir von den Gleichungen (4.) die für β_i mit a_k $(k \gtreqless r)$; wegen

$$[a_k\alpha_i] = 0 \quad \text{und} \quad [a_k\alpha_k] = [a_1 a_2 \ldots a_n]$$

folgt

$$\mathfrak{b}_{ik} = \frac{[a_k\beta_i]}{[a_1 a_2 \ldots a_n]}.$$

Setzt man diese Ausdrücke für $\mathfrak{b}_{ik}$ in obige Determinante ein und bedenkt noch, dass wegen

$$[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r] = [a_1 a_2 \ldots a_n]^{r-1}[a_{r+1}\ldots a_n],$$
$$[a_1 a_2 \ldots a_r . \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r] = [a_1 a_2 \ldots a_n]^r$$

ist, so folgt schliesslich die zu beweisende wichtige Gleichung

$$(6.)\qquad [a_1 a_2 \ldots a_r . \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_r] = \begin{vmatrix} [a_1\beta_1] & [a_2\beta_1] & \ldots & [a_r\beta_1] \\ [a_1\beta_2] & [a_2\beta_2] & \ldots & [a_r\beta_2] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [a_1\beta_r] & [a_2\beta_r] & \ldots & [a_r\beta_r] \end{vmatrix}.$$

III. *In einem Hauptgebiete $n$ter Stufe sei P eine einfache Grösse $a$ter Stufe (d. h. ein äusseres Product $a$ter Stufe von Grössen erster Stufe), Q eine einfache Grösse $b$ter Stufe ($b > n-a$) und e eine Grösse erster Stufe, die P aber nicht Q angehört; dann gilt der Satz:*

$$[P.Q.e] = (-1)^{n-a}[P[Qe]].$$

Da nämlich nach $\mathfrak{A}_1$ § 126 die beiden Grössen P und Q eine Grösse $(a+b-n)$-ter Stufe A gemeinsam haben, in der e nicht liegt, so kann man P und Q in den Formen darstellen

$$P = [eP'A],$$
$$Q = [Q'A],$$

worin P' die Stufenzahl $a-(a+b-n)-1 = n-b-1$ und Q' die Stufenzahl $b-(a+b-n) = n-a$ besitzt. Dann folgt

$$[PQe] = [eP'A.Q'A.e] = [eP'Q'A][Ae]$$

und

$$[P[Qe]] = [eP'A.Q'Ae] = (-1)^{a-1}[P'Ae.Q'Ae] = (-1)^{a-1}[P'Q'Ae][Ae]$$
$$= (-1)^{a-1}(-1)^{n-1}[eP'Q'A][Ae] = (-1)^{n+a}[eP'Q'A][Ae],$$

daher

$$[P[Qe]] = (-1)^{n+a}[PQe]$$

oder

$$(7.)\qquad [PQe] = (-1)^{n-a}[P[Qe]].$$

IV. *Bezeichnen $P_1, P_2, \ldots, P_r$ Grössen $(n-1)$-ter Stufe und e eine Grösse erster Stufe in einem Hauptgebiete $n$ter Stufe, dann lässt sich das Product*

$$[P_1 P_2 \ldots P_r . e]$$

in ein Product von $r-1$ durch e gehende Grössen $(n-1)$-ter Stufe auf nachfolgende Weise umformen.

Da nach Satz I.

$$[P_i P_k . e] = [P_i e]P_k - [P_k e]P_i \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r;\ i \gtrless k)$$

ist, so darf man in dem Producte $[P_1 P_2 \ldots P_r]$ irgend einen Factor P_i durch

$[P_i P_k . e]$ ersetzen, wenn man gleichzeitig durch $-[P_k e]$ dividirt. Nimmt man eine solche Ersetzung bei jedem Factor mit Ausnahme des letzten P_r vor, so erhält man

$$[P_1 P_2 \dots P_r] = \frac{1}{(-1)^{r-1}[P_i e][P_j e]\dots[P_k e]}[P_1 P_i e . P_2 P_j e \dots P_{r-1} P_k e . P_r],$$

mithin

$$[P_1 P_2 \dots P_r . e] = \frac{1}{(-1)^{r-1}[P_i e][P_j e]\dots[P_k e]}[P_1 P_i e . P_2 P_j e \dots P_{r-1} P_k e . P_r . e].$$

Nun ist $[P_1 P_i e . P_2 P_j e \dots P_{r-1} P_k e]$ als Product von $r-1$ Grössen $(n-1)$-ter Stufe, die durch e gehen, nach $\mathfrak{A}_1$ § 138 eine Grösse $(n-r+1)$-ter Stufe, die e enthält, P_r hingegen eine Grösse $(n-1)$-ter Stufe, die e nicht enthält, daher nach Satz III.

$$[P_1 P_i e . P_2 P_j e \dots P_{r-1} P_k e . P_r . e] = (-1)^{r-1}[P_1 P_i e . P_2 P_j e \dots P_{r-1} P_k e][P_r e].$$

Hierdurch geht die letzte Gleichung schliesslich über in

$$(8.) \qquad [P_1 P_2 \dots P_r . e] = \frac{[P_r e]}{[P_i e][P_j e]\dots[P_k e]}[P_1 P_i e . P_2 P_j e \dots P_{r-1} P_k e].$$

Dass bei dieser Umformung gerade der letzte Factor nicht ersetzt wurde, ist unwesentlich, da in dem Producte $[P_1 P_2 \dots P_r]$ durch Factorenvertauschung (mit oder ohne Zeichenwechsel) jeder Factor an die letzte Stelle gebracht werden kann.

§ 2.

Ableitung der Gleichungen:

$$[a^2 . b^2 . c^2 . 2ab . 2ac . 2bc] = [abc]^4$$
$$[A^2 . B^2 . C^2 . AB . AC . BC] = [abc]^8.$$

Wir betrachten zuerst die algebraischen Producte zweiten Grades von Punkten und Geradenstücken der Ebene. Nehmen wir in ihr irgend drei nicht in einer Geraden liegende Punkte e_1, e_2, e_3 als ursprüngliche Einheiten an, so sind alle Punkte der Ebene aus ihnen ableitbar; so z. B.

$$(9.) \qquad \begin{cases} a = \mathfrak{a}_1 e_1 + \mathfrak{a}_2 e_2 + \mathfrak{a}_3 e_3, \\ b = \mathfrak{b}_1 e_1 + \mathfrak{b}_2 e_2 + \mathfrak{b}_3 e_3, \\ c = \mathfrak{c}_1 e_1 + \mathfrak{c}_2 e_2 + \mathfrak{c}_3 e_3. \end{cases}$$

Die algebraischen Producte zweiten Grades der Punkte der Ebene, die wir *„Grössen zweiter Klasse"* nennen wollen, wie

$$a^2, \quad b^2, \quad c^2, \quad 2ab, \quad 2ac, \quad 2bc,$$

sind dann aus den entsprechenden Producten der ursprünglichen Einheiten

$$e_1^2,\quad e_2^2,\quad e_3^2,\quad 2e_1e_2,\quad 2e_1e_3,\quad 2e_2e_3,$$

die wir mit

$$e_{11},\quad e_{22},\quad e_{33},\quad e_{12},\quad e_{13},\quad e_{23}$$

bezeichnen und die *„ursprünglichen Einheiten zweiter Klasse“* nennen wollen, abgeleitet. Da diese sechs Producte von einander unabhängig sind, ***so bilden die Grössen zweiter Klasse in der Ebene ein Gebiet sechster Stufe.***

Nehmen wir das äussere Product der ursprünglichen Einheiten zweiter Klasse

$$[e_1^2.e_2^2.e_3^2.2e_1e_2.2e_1e_3.2e_2e_3] = 1$$

an, dann ist das äussere Product von irgend sechs von einander unabhängigen Grössen zweiter Klasse ein bestimmter Zahlenwerth. Wir wollen nun ermitteln, welcher Zahl das Product

$$P = [a^2.b^2.c^2.2ab.2ac.2bc]$$

gleich ist.

Sei

$$(10.)\qquad a' = \mathfrak{a}a+\mathfrak{b}b+\mathfrak{c}c$$

irgend ein anderer Punkt der Ebene und

$$P' = [a'^2.b^2.c^2.2a'b.2a'c.2bc]$$

das Product, welches aus P dadurch hervorgeht, dass a' statt a gesetzt wird dann ist wegen

$$\begin{aligned} a'^2 &= \mathfrak{a}^2a^2+\mathfrak{b}^2b^2+\mathfrak{c}^2c^2+\mathfrak{a}\mathfrak{b}2ab+\mathfrak{a}\mathfrak{c}2ac+\mathfrak{b}\mathfrak{c}2bc,\\ 2a'b &= 2\mathfrak{b}b^2+\mathfrak{a}2ab+\mathfrak{c}2bc,\\ 2a'c &= 2\mathfrak{c}c^2+\mathfrak{a}2ac+\mathfrak{b}2bc, \end{aligned}$$

und da man bei der Bildung von P' in diesen drei Grössen die Summanden b^2, c^2, $2bc$, welche noch als weitere Factoren hinzutreten, weglassen darf,

$$P' = [(\mathfrak{a}^2a^2+\mathfrak{a}\mathfrak{b}2ab+\mathfrak{a}\mathfrak{c}2ac).b^2.c^2.\mathfrak{a}2ab.\mathfrak{a}2ac.2bc],$$

oder mit nochmaliger Anwendung desselben Satzes auf die Summanden $2ab$ und $2ac$ des ersten Factors,

$$\begin{aligned} P' &= [\mathfrak{a}^2a^2.b^2.c^2.\mathfrak{a}2ab.\mathfrak{a}2ac.2bc]\\ &= \mathfrak{a}^4[a^2.b^2.c^2.2ab.2ac.2bc]\\ &= \mathfrak{a}^4P. \end{aligned}$$

Setzt man hierin für $\mathfrak{a}$ den aus (10.) sich ergebenden Werth $\frac{[a'bc]}{[abc]}$ ein,

so folgt

$$P' = \frac{[a'bc]^4}{[abc]^4} P$$

oder

$$\frac{P'}{[a'bc]^4} = \frac{P}{[abc]^4};$$

d. h. der Werth des Ausdruckes

$$\frac{P}{[abc]^4}$$

bleibt unverändert, wenn man irgend einen der drei darin auftretenden Punkte durch einen beliebigen anderen der Ebene ersetzt. Er wird also auch unverändert bleiben, wenn man alle drei Punkte durch beliebige andere ersetzt. Wählt man für sie insbesondere die ursprünglichen Einheiten e_1, e_2, e_3, für welche sowohl $[e_1 e_2 e_3]$ als P der Einheit gleich sind, so folgt

$$\frac{P}{[abc]^4} = 1$$

oder

$$(11.) \qquad [a^2.b^2.c^2.2ab.2ac.2bc] = [abc]^4.$$

Diese wichtige Gleichung macht uns von den ursprünglichen Einheiten unabhängig, indem wir bei der Ausrechnung irgend eines Ausdruckes nicht auf sie sondern nur auf die algebraischen Producte irgend dreier Punkte zurückzugehen brauchen.

Setzt man

$$(12.) \qquad [e_1 e_2] = E_3, \quad [e_2 e_3] = E_1, \quad [e_3 e_1] = E_2,$$

so sind E_1, E_2, E_3 die ursprünglichen Einheiten für die Geradenstücke der Ebene, daher die Geradenstücke

$$A = [bc], \quad B = [ca], \quad C = [ab]$$

aus ihnen ableitbar.

Zwischen den Einheiten e_i und E_i bestehen, wie man aus (12.) ersieht, die Beziehungen

$$(13.) \qquad [e_i E_i] = 1, \quad [e_i E_k] = 0.$$

Die algebraischen Producte zweiten Grades der Geradenstücke der Ebene, die wir *„Grössen zweiter Ordnung“* nennen wollen, wie

$$A^2, \quad B^2, \quad C^2, \quad AB, \quad AC, \quad BC,$$

sind dann aus den entsprechenden Producten der ursprünglichen Einheiten

$$E_1^2, \quad E_2^2, \quad E_3^2, \quad E_1 E_2, \quad E_1 E_3, \quad E_2 E_3,$$

die wir mit

$$E_{11},\quad E_{22},\quad E_{33},\quad E_{12},\quad E_{13},\quad E_{23}$$

bezeichnen und die *„ursprünglichen Einheiten zweiter Ordnung"* nennen wollen, abgeleitet. Da diese sechs Producte von einander unabhängig sind, so *bilden auch die Grössen zweiter Ordnung in der Ebene ein Gebiet sechster Stufe,* und wenn man

$$[E_1^2.E_2^2.E_3^2.E_1E_2.E_1E_3.E_2E_3] = 1$$

setzt, so findet man für die Grössen zweiter Klasse wie oben

$$[A^2.B^2.C^2.AB.AC.BC] = [ABC]^4,$$

oder da nach $\mathfrak{A}_1$ § 144

$$[ABC] = [abc]^2$$

ist,

$$(14.)\qquad [A^2.B^2.C^2.AB.AC.BC] = [abc]^8$$

§ 3.

Grundbeziehungen zwischen Grössen zweiter Ordnung und Grössen zweiter Klasse in der Ebene.

Aus der von *Grassmann* in Bd. 84 d. J. S. 277 gegebenen Definition des Productes einer Grösse $m$ter Klasse mit einer Grösse $m$ter Ordnung folgt für das Product einer Grösse pq zweiter Klasse mit einer Grösse PQ zweiter Ordnung die Definitionsgleichung

$$(15.)\qquad [pq.PQ] = \frac{[pP][qQ]+[pQ][qP]}{2}.$$

Für die Producte der ursprünglichen Einheiten folgt daraus, dass

$$[e_{ik}E_{ik}] = 1 \qquad (i, k = 1, 2, 3;\ i \gtreqless k)$$

und alle übrigen Producte Null sind.

Mit Benutzung dieser Formeln, die man auch als Definitionsgleichungen betrachten kann, lässt sich das Product einer Grösse zweiter Klasse mit einer Grösse zweiter Ordnung ausrechnen. Bemerken wir nun mit Herrn *Caspary**), dass diese Regeln für die Multiplication der Einheiten zweiter Ordnung und zweiter Klasse in die der inneren Multiplication der Einheiten zweiter Klasse übergehen, sobald man

$$E_{ik} = |e_{ik} \qquad (k \gtreqless i)$$

*) l. c. S. 139.

setzt, wo nach *Grassmann* $|e_{ik}$ das äussere Product der fünf übrigen Einheiten zweiter Klasse und zwar in solcher Reihenfolge bezeichnet, dass

$$[e_{ik}|e_{ik}] = 1$$

ist; dann kann das Product einer Grösse zweiter Klasse mit einer Grösse zweiter Ordnung gebildet werden, indem man in letzterer $E_{ik} = |e_{ik}$ setzt und nach den Gesetzen der äusseren Multiplication verfährt. Nimmt man dies stets an, *so sind die Einheiten E_{ik} und mithin alle Grössen zweiter Ordnung als äussere Producte fünfter Stufe von Grössen zweiter Klasse zu betrachten.*

Auf dieser Anschauungsweise, welche von *Grassmann* herrührt*), beruhen die nachfolgenden Auseinandersetzungen.

Eine erste Folge davon ist, dass wir in dem Producte $[pq.PQ]$ der Gleichung (15.) die beiden Factoren nur mit Zeichenwechsel vertauschen dürfen, da PQ eine Grösse von ungerader Stufenzahl ist. Wir haben daher

$$[PQ.pq] = -[pq.PQ] = -\frac{[pP][qQ]+[pQ][qP]}{2}$$

oder

$$(15^a.)\qquad [PQ.pq] = -\frac{[Pp][Qq]+[Pq][Qp]}{2}.$$

Nehmen wir nun wie in § 2 wieder irgend drei nicht in einer Geraden liegende Punkte a, b, c an und setzen

$$[ab] = C, \quad [bc] = A, \quad [ca] = B,$$

so sind $A^2, B^2, C^2, AB, AC, BC$ Grössen fünfter Stufe. Nennt man diese sechs Grössen bezw. entsprechend den Grössen

$$a^2, \quad b^2, \quad c^2, \quad 2ab, \quad 2ac, \quad 2bc,$$

so folgt aus der Definitionsgleichung (15.), dass das Product zweier entsprechender Grössen, wie $[a^2A^2]$, $[b^2B^2]$, $[c^2C^2]$, $[2ab.AB]$, $[2ac.AC]$, $[2bc.BC]$ immer $[abc]^2$, das Product zweier nicht entsprechender hingegen Null ist.

Da nun z. B. die Grösse fünfter Stufe A^2 mit jeder der Grössen $b^2, c^2, 2ab, 2ac, 2bc$ äusserlich multiplicirt Null giebt, so gehört sie dem durch diese fünf Grössen bestimmten Gebiete fünfter Stufe an, und es besteht mithin eine Gleichung

$$A^2 = \mathfrak{a}[b^2.c^2.2ab.2ac.2bc],$$

wo $\mathfrak{a}$ eine zu bestimmende Zahl bedeutet. Zu ihrer Ermittelung multipli-

*) d. J. Bd. 84, S. 283.

ciren wir die Gleichung mit a^2. Wir erhalten

$$[a^2A^2] = \mathfrak{a}[a^2.b^2.c^2.2ab.2ac.2bc]$$

oder wegen

$$[a^2A^2] = [abc]^2$$

und Gleichung (11.),

$$[abc]^2 = \mathfrak{a}[abc]^4,$$

woraus

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{[abc]^2}$$

folgt. Es besteht mithin die für das folgende wichtige Gleichung

$$(16^a.) \qquad A^2 = \frac{1}{[abc]^2}[b^2.c^2.2ab.2ac.2bc].$$

Analog ergeben sich die Gleichungen:

$$(16^b.) \qquad B^2 = -\frac{1}{[abc]^2}[a^2.c^2.2ab.2ac.2bc],$$

$$(16^c.) \qquad C^2 = \frac{1}{[abc]^2}[a^2.b^2.2ab.2ac.2bc],$$

$$(16^d.) \qquad AB = -\frac{1}{[abc]^2}[a^2.b^2.c^2.2ac.2bc],$$

$$(16^e.) \qquad AC = \frac{1}{[abc]^2}[a^2.b^2.c^2.2ab.2bc],$$

$$(16^f.) \qquad BC = -\frac{1}{[abc]^2}[a^2.b^2.c^2.2ab.2ac].$$

Hieraus erhält man durch Multiplication der ersten beiden Gleichungen nach $\mathfrak{A}_1$ § 132

$$[A^2B^2] = -\frac{1}{[abc]^4}[b^2.a^2.c^2.2ab.2ac.2bc][c^2.2ab.2ac.2bc]$$

oder, da der erste Factor nach Gleichung (11.) $-[abc]^4$ ist,

$$(17^a.) \qquad [A^2B^2] = [c^2.2ab.2ac.2bc].$$

Analog würden sich 14 andere Gleichungen ergeben, von denen wir nur

$$(17^b.) \qquad [AB.AC] = [a^2.b^2.c^2.2bc]$$

anführen.

Aus der Multiplication von (17^a.) mit (16^c.) folgt

$$[A^2B^2C^2] = \frac{1}{[abc]^2}[a^2.b^2.c^2.2ab.2ac.2bc][2ab.2ac.2bc]$$

oder wegen Gleichung (11.)

$$(18^a.) \qquad [A^2B^2C^2] = [abc]^2[2ab.2ac.2bc].$$

Analog ergiebt sich aus den Gleichungen (16^f.) und (17^b.)

$$(18^b.) \qquad [AB.AC.BC] = -[abc]^2[a^2b^2c^2].$$

§ 4.

Umformungen des Ausdrucks $[a^2b^2c^2d^2e^2f^2]$.

Bezeichnen d, e, f drei andere nicht in einer Geraden liegende Punkte, und wird

$$[de] = F, \quad [ef] = D, \quad [fd] = E$$

gesetzt, so ist nach (18^b.)

$$[DE.DF.EF] = -[def]^2[d^2e^2f^2]$$

oder, wenn man diese Gleichung mit (18^b.) multiplicirt,

$$(19.) \quad [AB.AC.BC.DE.DF.EF] = [abc]^2[def]^2[a^2b^2c^2d^2e^2f^2].$$

Ferner ergiebt sich durch Multiplication von Gleichung (18^b.) mit $[d^2e^2f^2]$

$$[[AB.AC.BC][d^2e^2f^2]] = -[abc]^2[a^2b^2c^2d^2e^2f^2];$$

da auf der linken Seite das Product dreier Grössen fünfter Stufe mit dem Producte dreier Grössen erster Stufe in einem Hauptgebiete sechster Stufe zu multipliciren ist, so kann dieser Ausdruck nach § 1, Satz II als Determinante

$$\begin{vmatrix} [AB.d^2] & [AC.d^2] & [BC.d^2] \\ [AB.e^2] & [AC.e^2] & [BC.e^2] \\ [AB.f^2] & [AC.f^2] & [BC.f^2] \end{vmatrix}$$

geschrieben werden. Formt man deren einzelne Elemente nach (15^a.) um, so erhält man die Gleichung

$$(20.) \quad \begin{vmatrix} [Ad][Bd] & [Ad][Cd] & [Bd][Cd] \\ [Ae][Be] & [Ae][Ce] & [Be][Ce] \\ [Af][Bf] & [Af][Cf] & [Bf][Cf] \end{vmatrix} = [abc]^2[a^2b^2c^2d^2e^2f^2].$$

Bevor wir zu einer wichtigeren Umformung übergehen, soll eine kurze Bemerkung gemacht werden.

Bezeichnen P, Q, R Geradenstücke und p einen Punkt, so sind die algebraischen Producte PQ und PR Grössen fünfter Stufe und p^2 eine

Grösse erster Stufe. Nach § 1, Satz I ist also

$$[PQ.PR.p^2] = [PQ.p^2]PR-[PR.p^2]PQ$$

oder, da zufolge (15ᵃ.)

$$[PQ.p^2] = -[Pp][Qp],$$
$$[PR.p^2] = -[Pp][Rp]$$

ist,

$$[PQ.PR.p^2] = -[Pp][Qp]PR+[Pp][Rp]PQ = [Pp]P(-[Qp]R+[Rp]Q).$$

Da hierin wieder nach § 1, Satz I.

$$-[Qp]R+[Rp]Q = -[Q.R.p]$$

zu setzen ist, so folgt schliesslich die Gleichung

$$(21.) \qquad [PQ.PR.p^2] = -[Pp]P[Q.R.p],$$

welche öfter Verwendung findet.

Multipliciren wir jetzt (18ᵇ.) mit d^2, so lässt sich in der erhaltenen Gleichung

$$[AB.AC.BC.d^2] = -[abc]^2[a^2b^2c^2d^2]$$

das Product linker Hand nach § 1, IV umformen und giebt

$$[AB.AC.BC.d^2] = [[AB.AC.d^2][AC.BC.d^2]]\frac{[BC.d^2]}{[AC.d^2][BC.d^2]}$$

oder, da nach Gleichung (21.)

$$[AB.AC.d^2] = -[Ad]A[B.C.d],$$
$$[AC.BC.d^2] = -[Cd]C[A.B.d],$$

und nach (15ᵃ.)

$$[AC.d^2] = -[Ad][Cd]$$

ist,

$$[AB.AC.BC.d^2] = -[A[B.C.d].C[A.B.d]].$$

Da hierin mit Berücksichtigung von

$$A = [bc], \quad B = [ca], \quad C = [ab],$$
$$[BC] = [ca.ab] = [abc]a$$

und

$$[AB] = [bc.ca] = [abc]c$$

zu setzen ist, so folgt

$$[AB.AC.BC.d^2] = -[abc]^2[[bc][ad].[ab][cd]]$$
$$= [abc]^2[[ab][cd].[bc][ad]],$$

mithin

(22.) $$[a^2b^2c^2d^2] = -[[ab][cd].[bc][ad]]$$ *).

Durch Multiplication dieser Gleichung mit $[e^2f^2]$ erhält man eine neue Umformung unseres Productes von sechs Punktquadraten, nämlich

$$[a^2b^2c^2d^2e^2f^2] = -[[ab][cd].[bc][ad].[e^2f^2]]$$

oder nach Anwendung von § 1, II auf die rechte Seite

(23.) $$\begin{cases} [a^2b^2c^2d^2e^2f^2] = -[[ab][cd].e^2][[bc][ad].f^2]+[[ab][cd].f^2][[bc][ad].e^2] \\ \qquad = -[abe][cde][bcf][adf]+[abf][cdf][bce][ade]. \end{cases}$$

Eine weitere Umformung unseres Productes erhält man aus Gleichung (18*.),

$$[A^2B^2C^2] = [abc]^2[2ab.2ac.2bc],$$

indem man sie mit $[de.df.ef]$ multiplicirt, das entstandene Product linker Hand nach § 1, II als Determinante schreibt und deren Elemente nach (15*.) umformt:

(24.) $$\begin{vmatrix} [Ad][Ae] & [Bd][Be] & [Cd][Ce] \\ [Ad][Af] & [Bd][Bf] & [Cd][Cf] \\ [Ae][Af] & [Be][Bf] & [Ce][Cf] \end{vmatrix} = -[abc]^2[2ab.2ac.2bc.de.df.ef].$$

Man sieht leicht, dass die Determinante links identisch ist mit der in Gleichung (20.) auftretenden, und schliesst daraus, dass

$$[a^2b^2c^2d^2e^2f^2] = -[2ab.2ac.2bc.de.df.ef]$$

oder

(25.) $$[a^2b^2c^2d^2e^2f^2] = -8[ab.ac.bc.de.df.ef]$$ **).

ist.

Schliesslich erhält man aus Gleichung (18*.)

$$[A^2B^2C^2] = [abc]^2[2ab.2ac.2bc]$$

und der analogen

$$[D^2E^2F^2] = [def]^2[2de.2df.2ef]$$

durch Multiplication

$$[A^2B^2C^2D^2E^2F^2] = [abc]^2[def]^2[2ab.2ac.2bc.2de.2df.2ef]$$

oder mit Bezugnahme auf Gleichung (25.)

(26.) $$[A^2B^2C^2D^2E^2F^2] = -8[abc]^2[def]^2[a^2b^2c^2d^2e^2f^2]$$ ***).

---

*) Vgl. *Caspary*, dieses Journal, Bd. 92, S. 141, Gleichung (68.), wo das Ergänzungszeichen unrichtig ist.

**) Vgl. *Caspary*, l. c. S. 144, woselbst der Coefficient 8 fehlt.

***) Vgl. *Pasch*, dieses Journal, Bd. 89, S. 248 Gleichung (3.).

§ 5.

Grundbeziehungen zwischen Grössen zweiter Ordnung und Grössen zweiter Klasse im Raume.

Nehmen wir im Raume irgend vier Punkte e_1, e_2, e_3, e_4, die nicht in einer Ebene liegen, als ursprüngliche Einheiten an, so sind alle Punkte des Raumes aus ihnen ableitbar; so z. B.:

$$a = \mathfrak{a}_1 e_1 + \mathfrak{a}_2 e_2 + \mathfrak{a}_3 e_3 + \mathfrak{a}_4 e_4,$$
$$b = \mathfrak{b}_1 e_1 + \mathfrak{b}_2 e_2 + \mathfrak{b}_3 e_3 + \mathfrak{b}_4 e_4,$$
$$c = \mathfrak{c}_1 e_1 + \mathfrak{c}_2 e_2 + \mathfrak{c}_3 e_3 + \mathfrak{c}_4 e_4,$$
$$d = \mathfrak{d}_1 e_1 + \mathfrak{d}_2 e_2 + \mathfrak{d}_3 e_3 + \mathfrak{d}_4 e_4.$$

Die algebraischen Producte zweiten Grades aller Punkte, die wir wieder *„Grössen zweiter Klasse"* nennen, wie

$$a^2, \quad b^2, \quad c^2, \quad d^2, \quad 2ab, \quad 2ac, \quad 2ad, \quad 2bc, \quad 2bd, \quad 2cd,$$

sind dann aus den entsprechenden Producten der ursprünglichen Einheiten

$$e_1^2, \quad e_2^2, \quad e_3^2, \quad e_4^2, \quad 2e_1e_2, \quad 2e_1e_3, \quad 2e_1e_4, \quad 2e_2e_3, \quad 2e_2e_4, \quad 2e_3e_4,$$

die wir mit

$$e_{11}, \quad e_{22}, \quad e_{33}, \quad e_{44}, \quad e_{12}, \quad e_{13}, \quad e_{14}, \quad e_{23}, \quad e_{24}, \quad e_{34}$$

bezeichnen und die *„ursprünglichen Einheiten zweiter Klasse"* nennen wollen, abgeleitet.

Da diese 10 Producte von einander unabhängig sind, so *bilden die Grössen zweiter Klasse im Raume ein Gebiet zehnter Stufe.*

Ganz analog wie in § 2 findet man hier, dass

$$(27.) \qquad [a^2.b^2.c^2.d^2.2ab.2ac.2ad.2bc.2bd.2cd] = [abcd]^5 \text{*)}$$

ist, sobald

$$[e_{11}e_{22}e_{33}e_{44}e_{12}e_{13}e_{14}e_{23}e_{24}e_{34}] = 1$$

gesetzt wird.

Die vier durch e_1, e_2, e_3, e_4 bestimmten Ebenenstücke

$$(28.) \qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = [e_2e_3e_4], \\ \varepsilon_2 = [e_3e_1e_4], \\ \varepsilon_3 = [e_1e_2e_4], \\ \varepsilon_4 = [e_3e_2e_1] \end{cases}$$

*) Diese Gleichung ist identisch mit Gleichung (16.) bei *Hunyady*, dieses Journal Bd. 89 S. 60.

sind die ursprünglichen Einheiten für die Ebenenstücke des Raumes, daher die Ebenenstücke

(29.) $$\alpha = [bcd],\quad \beta = [cad],\quad \gamma = [abd],\quad \delta = [cba]$$

aus ihnen ableitbar.

Zwischen den Einheiten e_i und ε_i bestehen, wie man sieht, die Beziehungen

(30.) $$[e_i \varepsilon_i] = 1,\quad [e_i \varepsilon_k] = 0,$$

und zwischen a, b, c, d und α, β, γ, δ, wie gleich hier erwähnt werden soll, die Beziehungen

(31.) $$\begin{cases} [a\alpha] = [b\beta] = [c\gamma] = [d\delta] = [abcd], \\ [a\beta] = [a\gamma] = [a\delta] = [b\alpha] = [b\gamma] = \cdots = 0. \end{cases}$$

Die algebraischen Producte zweiten Grades aller Ebenenstücke des Raumes, die wir *„Grössen zweiter Ordnung“* nennen, wie

$$\alpha^2,\quad \beta^2,\quad \gamma^2,\quad \delta^2,\quad \alpha\beta,\quad \alpha\gamma,\quad \alpha\delta,\quad \beta\gamma,\quad \beta\delta,\quad \gamma\delta$$

sind demnach aus den entsprechenden Producten der ursprünglichen Einheiten

$$\varepsilon_1^2,\quad \varepsilon_2^2,\quad \varepsilon_3^2,\quad \varepsilon_4^2,\quad \varepsilon_1\varepsilon_2,\quad \varepsilon_1\varepsilon_3,\quad \varepsilon_1\varepsilon_4,\quad \varepsilon_2\varepsilon_3,\quad \varepsilon_2\varepsilon_4,\quad \varepsilon_3\varepsilon_4,$$

die wir bzgl. mit

$$\varepsilon_{11},\quad \varepsilon_{22},\quad \varepsilon_{33},\quad \varepsilon_{44},\quad \varepsilon_{12},\quad \varepsilon_{13},\quad \varepsilon_{14},\quad \varepsilon_{23},\quad \varepsilon_{24},\quad \varepsilon_{34}$$

bezeichnen und die *„ursprünglichen Einheiten zweiter Ordnung“* nennen wollen, abgeleitet.

Die Grössen zweiter Ordnung im Raume bilden ebenfalls ein Gebiet zehnter Stufe, und wenn man

$$[\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}\varepsilon_{44}\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{14}\varepsilon_{23}\varepsilon_{24}\varepsilon_{34}] = 1$$

setzt, so ist wieder

$$[\alpha^2.\beta^2.\gamma^2.\delta^2.\alpha\beta.\alpha\gamma.\alpha\delta.\beta\gamma.\beta\delta.\gamma\delta] = [\alpha\beta\gamma\delta]^5$$

oder, wegen

$$[\alpha\beta\gamma\delta] = [abcd]^3,$$

(32.) $$[\alpha^2.\beta^2.\gamma^2.\delta^2.\alpha\beta.\alpha\gamma.\alpha\delta.\beta\gamma.\beta\delta.\gamma\delta] = [abcd]^{15}.$$

Definiren wir analog wie in § 3 das Product einer Grösse pq zweiter Klasse mit einer Grösse $\pi\varphi$ zweiter Ordnung durch die Gleichung

(33.) $$[pq.\pi\varphi] = \frac{[p\pi][q\varphi]+[p\varphi][q\pi]}{2},$$

so können wir wie dort schliessen, dass die Multiplication als äussere auf-

zufassen ist, bei der

$$\varepsilon_{ik} = |e_{ik}$$

gesetzt wurde. ***Die Grössen zweiter Ordnung im Raume sind demnach als äussere Producte neunter Stufe von Grössen zweiter Klasse zu betrachten.***

Demzufolge sind auch hier die Factoren des Productes $[pq.\pi\varphi]$ nur mit Zeichenwechsel vertauschbar. Wir haben daher

$$[\pi\varphi.pq] = -[pq.\pi\varphi] = -\frac{[p\pi][q\varphi]+[p\varphi][q\pi]}{2}$$

oder

$$(33^a.) \qquad [\pi\varphi.pq] = -\frac{[\pi p][\varphi q]+[\pi q][\varphi p]}{2}.$$

In vollkommener Analogie mit § 3 ergiebt sich weiter:

$$(34.) \quad \begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{[abcd]^3}[b^2.c^2.d^2.2ab\ldots 2cd], \\ \beta^2 = -\frac{1}{[abcd]^3}[a^2.c^2.d^2.2ab\ldots 2cd], \\ \gamma^2 = \frac{1}{[abcd]^3}[a^2.b^2.d^2.2ab\ldots 2cd], \\ \delta^2 = -\frac{1}{[abcd]^3}[a^2.b^2.c^2.2ab\ldots 2cd], \\ \alpha\beta = \frac{1}{[abcd]^3}[a^2.b^2.c^2.d^2.2ac\ldots 2cd], \\ \text{etc.} \end{cases}$$

und hieraus folgen durch Multiplication eine Reihe andererer Gleichungen, von denen wir nur

$$(35.) \qquad [\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2] = [abcd]^3[2ab.2ac.2ad.2bc.2bd.2cd]$$

und

$$(36.) \qquad [\alpha\beta.\alpha\gamma.\alpha\delta.\beta\gamma.\beta\delta.\gamma\delta] = [abcd]^7[a^2b^2c^2d^2]$$

anführen wollen.

§ 6.

Umformung des Ausdrucks $\Delta = [a^2b^2c^2d^2e^2f^2g^2h^2i^2k^2]$.

Durch Multiplication der Gleichung (36.) mit dem äusseren Producte $[e^2f^2g^2h^2i^2k^2]$ von sechs Punktquadraten erhält man die Gleichung

$$(37.) \qquad [abcd]^7\Delta = [[\alpha\beta.\alpha\gamma.\alpha\delta.\beta\gamma.\beta\delta.\gamma\delta][e^2f^2g^2h^2i^2k^2]],$$

die identisch mit Gleichung (17.) des Herrn *Hunyady* l. c. ist; denn schreibt

man das Product rechter Hand nach § 1, II als Determinante und formt deren einzelne Elemente nach Gleichung (33ª.) um, so gelangt man zur Determinante:

$$\begin{vmatrix} [\alpha e][\beta e] & [\alpha e][\gamma e] & [\alpha e][\delta e] & [\beta e][\gamma e] & [\beta e][\delta e] & [\gamma e][\delta e] \\ [\alpha f][\beta f] & [\alpha f][\gamma f] & [\alpha f][\delta f] & [\beta f][\gamma f] & [\beta f][\delta f] & [\gamma f][\delta f] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [\alpha k][\beta k] & [\alpha k][\gamma k] & [\alpha k][\delta k] & [\beta k][\gamma k] & [\beta k][\delta k] & [\gamma k][\delta k] \end{vmatrix},$$

die sich nur in der Bezeichnung der Punkte von Δ_{1234} des Herrn *Hunyady* unterscheidet.

Eine andere Umformung ergiebt sich aus der Darstellung eines Productes von fünf Punktquadraten als Product von fünf Ebenenpaaren, zu der wir nun übergehen wollen.

Aus Gleichung (36.) folgt durch Multiplication mit e^2:

$$[\alpha\beta.\alpha\gamma.\alpha\delta.\beta\gamma.\beta\delta.\gamma\delta.e^2] = [abcd]^7[a^2b^2c^2d^2e^2].$$

Das Product links formen wir nach § 1, IV folgendermassen um:

$$[\alpha\beta.\alpha\gamma.\alpha\delta.\beta\gamma.\beta\delta.\gamma\delta.e^2] = \frac{[[\alpha\beta.\alpha\gamma.e^2][\alpha\gamma.\alpha\delta.e^2][\alpha\delta.\beta\delta.e^2][\beta\gamma.\beta\delta.e^2][\beta\delta.\gamma\delta.e^2]][\gamma\delta.e^2]}{[\alpha\gamma.e^2][\alpha\delta.e^2][\beta\delta.e^2][\beta\delta.e^2][\gamma\delta.e^2]}$$

oder, da analog mit Gleichung (21.)

$$(38.)\qquad [\pi\varphi.\pi\varrho.p^2] = -[\pi p]\pi[\varphi.\varrho.p],$$

mithin

$$\begin{aligned} [\alpha\beta.\alpha\gamma.e^2] &= -[\alpha e]\alpha[\beta.\gamma.e], \\ [\alpha\gamma.\alpha\delta.e^2] &= -[\alpha e]\alpha[\gamma.\delta.e], \\ [\alpha\delta.\beta\delta.e^2] &= -[\delta e]\delta[\alpha.\beta.e], \\ [\beta\gamma.\beta\delta.e^2] &= -[\beta e]\beta[\gamma.\delta.e], \\ [\beta\delta.\gamma\delta.e^2] &= -[\delta e]\delta[\beta.\gamma.e] \end{aligned}$$

und

$$[\alpha\gamma.e^2] = -[\alpha e][\gamma e], \quad [\alpha\delta.e^2] = -[\alpha e][\delta e], \quad \text{etc.}$$

ist,

$$[\alpha\beta.\alpha\gamma.\alpha\delta.\beta\gamma.\beta\delta.\gamma\delta.e^2] = \frac{1}{[\beta e][\gamma e][\delta e]}[\alpha[\beta.\gamma.e].\alpha[\gamma.\delta.e].\delta[\alpha.\beta.e].\beta[\gamma.\delta.e].\delta[\beta.\gamma.e]].$$

Ersetzt man hierin den Factor $\beta[\gamma.\delta.e]$ durch

$$[\gamma.\delta.e]([\alpha e]\beta - [\beta e]\alpha),$$

indem man gleichzeitig durch $[\alpha e]$ dividirt, so lautet die gesuchte Gleichung,

da nach § 1, I

$$[\alpha e]\beta - [\beta e]\alpha = [\alpha.\beta.e]$$

ist,

$$[abcd]^7[a^2b^2c^2d^2e^2]$$
$$= \frac{1}{[\alpha e][\beta e][\gamma e][\delta e]}\left[\!\left[\alpha[\beta.\gamma.e].\alpha[\gamma.\delta.e].\delta[\alpha.\beta.e].[\gamma.\delta.e][\alpha.\beta.e].\delta[\beta.\gamma.e]\right]\!\right].$$

Damit rechts nur die Punkte a, b, c, d, e auftreten, ersetzen wir $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nach (29.). Hierdurch erhalten wir schliesslich

$$(39.)\quad \begin{cases} [abcd][abde][bcde][cade][cbae][a^2b^2c^2d^2e^2] \\ \qquad = \left[\!\left[[ade][bcd].[abe][bcd].[cde][abc].[abe][cde].[ade][abc]\right]\!\right]. \end{cases}$$

Aus dieser Darstellung eines Productes von fünf Punktquadraten ergeben sich zwei Umformungen unseres Productes $\varDelta$. Multipliciren wir einmal Gleichung (39.) mit $[f^2g^2h^2i^2k^2]$, so folgt

$$(40.)\quad \begin{cases} [abcd][abde][bcde][cade][cbae]\varDelta \\ = \left[\!\left[[ade][bcd].[abe][bcd].[cde][abc].[abe][cde].[ade][abc].[f^2g^2h^2i^2k^2]\right]\!\right] \end{cases}$$

identisch mit Gleichung (25.) des Herrn *Hunyady* l. c.; denn das Product rechts nach § 1, II als Determinante entwickelt giebt die von ihm mit $\varDelta_{12345}$ bezeichnete Determinante.

Da ferner zufolge (39.) auch die Gleichung

$$[fghi][fgik][ghik][hfik][hgfk][f^2g^2h^2i^2k^2]$$
$$= \left[\!\left[[fik][ghi].[fgk][ghi].[hik][fgh].[fgk][hik].[fik][fgh]\right]\!\right]$$

besteht, so folgt aus der Multiplication dieser Gleichung mit (39.)

$$(41.)\quad \begin{cases} [abcd][abde][bcde][cade][cbae][fghi][fgik][ghik][hfik][hgfk]\varDelta \\ \qquad = \left[\!\left[[ade][bcd].[abe][bcd].[cde][abc].[abe][cde].[ade][abc]\right.\right. \\ \qquad\qquad \left.\left..[fik][ghi].[fgk][ghi].[hik][fgh].[fgk][hik].[fik][fgh]\right]\!\right], \end{cases}$$

welche Gleichung identisch mit Gleichung (27.) des Herrn *Hunyady* ist.

Um schliesslich das Product von sechs Punktquadraten als Product von vier Ebenenpaaren darzustellen, multipliciren wir Gleichung (39.) mit f^2. In der sich ergebenden Gleichung

$$[abcd][abde][bcde][cade][cbae][a^2b^2c^2d^2e^2f^2]$$
$$= \left[\!\left[[ade][bcd].[abe][bcd].[cde][abc].[abe][cde].[ade][abc].f^2\right]\!\right]$$

formen wir die rechte Seite, nach Vertauschung des dritten und vierten

Factors, wieder nach § 1, IV um. Sie erhält die Form

$$-\frac{[[[ade][bcd].[abe][bcd].f^2].[[abe][bcd].[abe][cde].f^2].[[abe][cde].[cde][abc].f^2].[[cde][abc].[ade][abc].f^2]]}{[[abe][bcd].f^2][[abe][cde].f^2][[cde][abc].f^2]}$$

oder, da nach (38.)

$$[[ade][bcd].[abe][bcd].f^2] = -[bcdf][bcd][[ade].[abe].f] = -[bcdf][abed][bcd][aef],$$
$$[[abe][bcd].[abe][cde].f^2] = -[abef][abe][[bcd].[cde].f] = -[abef][bcde][abe][cdf],$$
$$[[abe][cde].[cde][abc].f^2] = -[cdef][cde][[abe].[abc].f] = -[cdef][abec][cde][abf],$$
$$[[cde][abc].[ade][abc].f^2] = -[abcf][abc][[cde].[ade].f] = -[abcf][cade][abc][def],$$
$$[[abe][bcd].f^2] = -[abef][bcdf],$$
$$[[abe][cde].f^2] = -[abef][cdef],$$
$$[[cde][abc].f^2] = -[cdef][abcf]$$

ist, die Form

$$[[bcd][aef].[abe][cdf].[cde][abf].[abc][def]] \cdot \frac{[abed][bcde][abec][cade]}{[abef][cdef]}.$$

Die gesuchte Gleichung lautet daher

$$(42.)\quad \begin{cases} [[bcd][aef].[abe][cdf].[cde][abf].[abc][def]] \\ \qquad = -[abcd][abef][cdef][a^2b^2c^2d^2e^2f^2]. \end{cases}$$

Multiplicirt man sie mit $[g^2h^2i^2k^2]$ und schreibt dann die linke Seite als Determinante, so erhält man eine Gleichung, die mit Gleichung (21.) des Herrn ***Hunyady*** zu derselben Gruppe gehört.

Aus dem Vorhergehenden dürfte auch zur Genüge die Anwendbarkeit derselben Methoden auf algebraische Grössen höherer Grade ersichtlich sein, z. B. zur Umformung des äusseren Productes von zehn Punktkuben der Ebene, worauf wir jedoch an dieser Stelle nicht weiter eingehen wollen.

Königsberg i. Pr., December 1894.

Ueber einen neuen Fundamentalsatz in der Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen.

(Von Herrn *K. Hensel.*)

Bei den folgenden Untersuchungen will ich mich der Einfachheit wegen auf die algebraischen Functionen einer Veränderlichen beschränken, bemerke aber, dass sie auch für numerische Gleichungen, sowie für solche mit zwei und mehreren unabhängigen Veränderlichen Anwendung finden. Auf die bezüglichen Resultate werde ich in einer demnächst erscheinenden Arbeit näher eingehen.

§ 1.

Der grösste gemeinsame Theiler von rationalen und von conjugirten algebraischen Functionen.

Es seien

$$a_1(x),\quad a_2(x),\quad \ldots,\quad a_n(x)$$

n ganze oder auch gebrochene rationale Functionen von x; dann ist eine andere rationale Function $\delta(x)$ dann und nur dann ein gemeinsamer Theiler jener Grössen $a_1, \ldots, a_n$, wenn sie in jeder von ihnen enthalten ist, wenn also die n Quotienten $\frac{a_i(x)}{\delta(x)}$ sämmtlich ganze Functionen von x sind.

Jeder dieser Theiler $\delta(x)$ ist in einer Function $d(x)$ enthalten, welche der *grösste gemeinsame Theiler* von $a_1, \ldots, a_n$ genannt und nach *Kroneckers* Vorgange folgendermassen bezeichnet wird:

$$d(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x));$$

umgekehrt ist auch jeder Divisor von $d(x)$ ein gemeinsamer Theiler jener n Functionen. Um diesen Theiler $d(x)$ zu bilden, denke man sich jede der Functionen $a_i(x)$ als Product ihrer Linearfactoren mit positiven oder negativen Exponenten dargestellt, und nehme jeden von ihnen so oft in $d(x)$ auf, als er in den n Functionen mindestens vorkommt. Aus dieser Darstellung

von $d(x)$ folgt, dass jener Theiler dann und nur dann eine ganze Function von x ist, wenn dasselbe von *allen* Elementen $a_1, \ldots, a_n$ gilt. Es kann aber $d(x)$ bekanntlich auch ohne Kenntniss der Linearfactoren von $a_1, \ldots, a_n$ aus diesen allein durch das sogenannte Euklidische Verfahren also auf rationalem Wege gebildet werden.

Den rationalen Functionen stehen diejenigen am nächsten, welche gleich einer Wurzel aus einer rationalen Function sind, also in der Form:

$$\sqrt[\varrho]{a(x)} = a(x)^{\frac{1}{\varrho}}$$

dargestellt werden können. Einer bekannten Bezeichnungsweise folgend, will ich solche Functionen von x als *Wurzelfunctionen* bezeichnen, und zwar als ganze oder gebrochene, je nachdem der Radicand $a(x)$ ganz oder gebrochen ist. Die ϱ conjugirten Werthe von $a(x)^{\frac{1}{\varrho}}$ unterscheiden sich nur um Constanten, nämlich um ϱte Wurzeln der Einheit, und es möge in jedem einzelnen Falle einer jener ϱ Werthe für $a^{\frac{1}{\varrho}}$ willkürlich gewählt dann aber für den ganzen Verlauf der Untersuchung beibehalten werden.

Selbstverständlich ist jedes Product von Linearfactoren

$$d(x) = \Pi(x-a)^{\delta}$$

mit beliebigen rational *gebrochenen* Exponenten eine Wurzelfunction in dem hier angegebenen Sinne, da $d(x)^{\varrho}$ gleich einer rationalen Function von x ist, wenn ϱ ein gemeinsames Vielfaches aller Nenner der Exponenten δ ist.

Sind nun

$$a_1(x)^{\frac{1}{\varrho_1}}, \quad \ldots, \quad a_n(x)^{\frac{1}{\varrho_n}}$$

n beliebige Wurzelfunctionen, und definirt man einen gemeinsamen Theiler $\delta(x)$ von ihnen genau in der oben angegebenen Weise, so findet man, dass alle jene Divisoren $\delta(x)$ zusammenfallen mit den sämmtlichen Theilern einer anderen Wurzelfunction:

$$d(x) = \left(a_1^{\frac{1}{\varrho_1}}, a_2^{\frac{1}{\varrho_2}}, \ldots, a_n^{\frac{1}{\varrho_n}}\right),$$

welche genau ebenso gefunden wird, wie der Theiler rationaler Functionen: Man schreibt nämlich jede der n Wurzelfunctionen $a^{\frac{1}{\varrho}}$ als Product ihrer Linearfactoren mit positiven oder negativen rational gebrochenen Exponenten und nimmt jeden Linearfactor so oft in $d(x)$ auf, als er in den n Functionen

$a_i(x)^{\frac{1}{e_i}}$ mindestens vorkommt. Auch diese gemeinsamen Theiler können offenbar ohne die Kenntniss der Linearfactoren von $a_1, \ldots, a_n$ allein durch das Euklidische Verfahren gefunden werden. Der Theiler $d(x)$ ist dann und nur dann eine *ganze* Wurzelfunction, wenn dasselbe von jedem der n Elemente $a_1, \ldots, a_n$ gilt.

Es sei

$$d(x) = \Pi(x-\alpha_i)^{\delta_i}$$

irgend eine Wurzelfunction, d. h. es mögen die Exponenten δ_i positive oder negative rationale Brüche sein; dann will ich im Folgenden mit

$$[d(x)]$$

den grössten *rationalen* Divisor von $d(x)$, d. h. die rationale Function von möglichst hohem Grade bezeichnen, welche noch in $d(x)$ enthalten, für welche also der Quotient $\frac{d(x)}{[d(x)]}$ noch ganz ist. Offenbar ist dann:

$$[d(x)] = \Pi(x-\alpha_i)^{[\delta_i]},$$

wo, wie gewöhnlich $[\delta]$ die grösste ganze Zahl bedeutet, welche gleich oder kleiner als der Bruch δ ist. Der Quotient:

$$R(d(x)) = \frac{d(x)}{[d(x)]} = \Pi(x-\alpha_i)^{\delta_i-[\delta_i]}$$

ist dann eine ganze Wurzelfunction, deren Exponenten sämmtlich *positive echte* Brüche sind, und sie ist die ganze Wurzelfunction niedrigsten Grades, welche sich von $d(x)$ um einen rationalen Factor unterscheidet. Daher soll $R(d(x))$ im Anschluss an eine bekannte Bezeichnung der Zahlentheorie *der kleinste Rest von* $d(x)$ genannt werden.

Eine Wurzelfunction, deren Linearfactoren sämmtlich positive echt gebrochene Exponenten haben, welche also mit ihrem kleinsten Reste übereinstimmt, soll eine *reducirte ganze Wurzelfunction* genannt werden, weil sie ganz ist und durch Division mit einer rationalen Function nicht weiter reducirt werden kann.

Der Begriff der grössten gemeinsamen Theiler soll nunmehr auch auf conjugirte algebraische Functionen von x ausgedehnt werden. Es sei y mit x durch eine beliebige algebraische Gleichung verbunden, so kann dieselbe folgendermassen geschrieben werden:

$$y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x) = 0,$$

wo die Coefficienten $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ beliebige rationale ganze oder ge-

brochene Functionen von x bedeuten. Sind $a_1, \ldots, a_n$ *ganze* Functionen von x, so heisst y eine *ganze* algebraische Function von x, weil in diesem und nur in diesem Falle y für alle endlichen Werthe von x ebenfalls endlich bleibt. Aus dieser Definition folgt, dass y in demselben Sinne algebraisch ganz ist, wenn die Coefficienten $a_i(x)$ irgend welche ganze *algebraische* Functionen von x sind.

Es seien nun

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n$$

die n conjugirten Wurzeln jener Gleichung oder die n conjugirten Zweige der durch jene Gleichung definirten algebraischen Function. Ich nenne dann eine Function δ von x einen gemeinsamen Theiler der n conjugirten algebraischen Functionen $y_1, \ldots, y_n$, wenn die n Quotienten:

$$\frac{y_1}{\delta}, \quad \frac{y_2}{\delta}, \quad \ldots, \quad \frac{y_n}{\delta}$$

sämmtlich algebraisch ganz, d. h. für alle endlichen Werthe von x endlich sind. Setzt man aber jene n Quotienten $\frac{y_1}{\delta}, \ldots, \frac{y_n}{\delta}$ beziehlich gleich $\eta_1, \ldots, \eta_n$, so genügen sie der Gleichung:

$$\eta^n + \frac{a_1(x)}{\delta}\eta^{n-1} + \frac{a_2(x)}{\delta^2}\eta^{n-2} + \cdots + \frac{a_n(x)}{\delta^n} = 0,$$

welche aus der Gleichung für y durch die Substitution $y = \delta\eta$ hervorgeht; jene n Quotienten sind also *dann und nur dann* algebraisch ganz, oder allenthalben endlich, wenn dasselbe für die n Quotienten:

$$\frac{a_1(x)}{\delta}, \quad \frac{a_2(x)}{\delta^2}, \quad \ldots, \quad \frac{a_n(x)}{\delta^n}$$

der Fall ist, wenn also δ ein Theiler der folgenden Wurzelfunction ist:

$$(1.) \qquad d(x) = \left(a_1(x),\ a_2(x)^{\frac{1}{2}},\ a_3(x)^{\frac{1}{3}},\ \ldots,\ a_n(x)^{\frac{1}{n}}\right).$$

Auch hier fallen also alle gemeinsamen Theiler der conjugirten Functionen $(y_1, \ldots, y_n)$ mit den sämmtlichen Divisoren der Wurzelfunction $d(x)$ zusammen, und aus diesem Grunde will ich die durch (1.) definirte Wurzelfunction den grössten gemeinsamen Theiler der conjugirten Functionen $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ nennen, und ihn auch durch $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ bezeichnen*).

*) Ich bemerke hier, dass jener Theiler natürlich mit dem idealen Theiler von $(y_1, \ldots, y_n)$ zusammenfällt; ich habe aber von dieser Definition desselben absichtlich keinen Gebrauch gemacht, um den elementaren Charakter der hier anzugebenden Deductionen deutlicher hervortreten zu lassen.

Der grösste gemeinsame Theiler von conjugirten algebraischen Functionen von x ist also stets eine Wurzelfunction, welche aus den Coefficienten $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ der definirenden Gleichung auf rationalem Wege bestimmt werden kann. Aus der Darstellung

$$d(x) = (a_1, a_2^{\frac{1}{2}}, \ldots, a_n^{\frac{1}{n}})$$

ergiebt sich noch, dass die Nenner der in $d(x)$ auftretenden gebrochenen Exponenten nur Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, n$ selbst, also höchstens gleich dem Grade der Gleichung für y sind. Ferner ist jener Theiler dann und nur dann eine *ganze* Wurzelfunction, wenn *alle* Coefficienten $a_1, \ldots, a_n$ der Gleichung für y ebenfalls ganz, wenn also y eine *ganze* algebraische Function von x ist. In jedem anderen Falle ist $d(x)$ eine gebrochene Wurzelfunction von x, in deren Nenner alle und nur die Linearfactoren vorkommen, welche Unendlichkeitsstellen von y entsprechen.

Sind

$$y_1, \ldots, y_n; \quad z_1, \ldots, z_r; \quad \ldots; \quad w_1, \ldots, w_s$$

eine Reihe von conjugirten algebraischen Functionen von x, welche bezw. durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n &= 0, \\ z^r + b_1 z^{r-1} + \cdots + b_r &= 0, \\ \vdots \quad \vdots \quad\quad\quad \vdots & \\ w^s + c_1 w^{s-1} + \cdots + c_s &= 0 \end{aligned}$$

definirt sind, so verstehe ich unter einem gemeinsamen Theiler jener conjugirten Functionen jede Function δ von x, für welche *alle* Quotienten

$$\frac{y_i}{\delta}, \quad \frac{z_k}{\delta}, \quad \ldots, \quad \frac{w_l}{\delta} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, r \\ \cdots\cdots\cdots \\ l = 1, 2, \ldots, s \end{pmatrix}$$

algebraisch ganz, d. h. für jeden endlichen Werth von x ebenfalls endlich sind, und hieraus folgt ganz ebenso wie früher, dass die Function δ dann und nur dann ein gemeinsamer Theiler jener algebraischen Grössen ist, wenn sie ein Divisor der durch die Gleichung:

$$d(x) = (a_1, a_2^{\frac{1}{2}}, \ldots, a_n^{\frac{1}{n}}; b_1, b_2^{\frac{1}{2}}, \ldots, b_r^{\frac{1}{r}}; \ldots; c_1, c_2^{\frac{1}{2}}, \ldots, c_s^{\frac{1}{s}})$$

definirten Wurzelfunction ist, welche aus diesem Grunde wieder der grösste gemeinsame Theiler der conjugirten Functionen $y_i, z_k, \ldots, w_l$ genannt und als

solcher durch

$$d(x) = (y_1, \ldots, y_n; z_1, \ldots, z_r; \ldots; w_1, \ldots, w_s)$$

bezeichnet werden soll. Hieraus folgt also noch der folgende wichtige Satz:

Der grösste gemeinsame Theiler von mehreren Systemen conjugirter algebraischer Functionen ist stets eine Wurzelfunction von x, nämlich gleich dem gemeinsamen Theiler derjenigen Wurzelfunctionen, welche als grösste gemeinsame Theiler in den einzelnen conjugirten Systemen enthalten sind.

§ 2.

Die Elementartheiler rationaler und algebraischer Systeme.

Es sei zunächst

$$(a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}$$

ein rechteckiges System von mn rationalen ganzen oder gebrochenen Functionen von x. Ferner werden mit

$$D_1(x), \quad D_2(x), \quad \ldots, \quad D_n(x)$$

die grössten gemeinsamen Theiler bezeichnet, welche die Determinanten der ersten, der zweiten, der dritten Ordnung u. s. w. von (a_{ik}) besitzen. Sind alle Elemente *ganze* Functionen von x, so gilt dasselbe von allen jenen Determinantentheilern; im entgegengesetzten Falle treten unter jenen Theilern nothwendig auch gebrochene Functionen von x auf.

Der Quotient je zweier auf einander folgenden Determinantentheiler

$$E_i = \frac{D_i}{D_{i-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

heisst der $i$te Elementartheiler des Systemes (a_{ik}). Sie sind die eigentlichen Elementarinvarianten, aus denen die Determinantentheiler durch die Gleichungen:

$$D_i = E_1 . E_2 \ldots E_i$$

zusammengesetzt sind.

Componirt man ein System (a_{ik}) vorn und hinten mit je einem anderen System (α_{ik}) bezw. (β_{ik}), deren Elemente aber *ganze* rationale Functionen von x sein sollen, so erhält man ein neues durch die Compositionsgleichung:

$$(\alpha_{ik})(a_{ik})(\beta_{ik}) = (\bar{a}_{ik})$$

definirtes System $(\bar{a}_{ik})$; jedes solches System soll ein *Vielfaches* von (a_{ik}) genannt werden. Für diese Beziehung zwischen (a_{ik}) und $(\bar{a}_{ik})$ besteht nun der folgende Fundamentalsatz, auf welchem die hier zu gebenden Resultate sämmtlich beruhen:

Das System $(\bar{a}_{ik})$ ist dann und nur dann ein Vielfaches von (a_{ik}), wenn jeder seiner Elementartheiler $\bar{E}_i$ ein Vielfaches des entsprechenden Elementartheilers E_i von (a_{ik}) ist, wenn also die n Gleichungen:

$$\bar{E}_i = M_i E_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen; und hier sind dann $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ganze Grössen desjenigen Bereiches, dem die Elemente der Systeme (α), (a) und (β) angehören.

Ich habe für diesen wohl zuerst von Herrn *Frobenius* für ganzzahlige Systeme aufgestellten Satz im 114. Bande S. 109—115 dieses Journals in der Abhandlung „Ueber die Elementartheiler componirter Systeme“ einen allgemeinen Beweis angegeben, welcher auch für beliebige Elemente a_{ik}, speciell für den hier in Betracht kommenden Fall gilt, dass dieselben ganze oder gebrochene rationale oder algebraische Functionen von x sind*).

Sind (a_{ik}) und $(\bar{a}_{ik})$ zwei Systeme, von denen jedes ein Vielfaches des anderen ist, so heissen sie *äquivalent*, und der obige Satz lehrt, dass zwei Systeme dann und nur dann äquivalent sind, wenn sie gleiche Elementartheiler haben.

Eine weitere einfache Folgerung aus jenem Satze ist der folgende:

Jedes System (a_{ik}) ist dem aus seinen Elementartheilern $E_1, \ldots, E_n$ gebildeten Diagonalsysteme

$$(E_i) = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & E_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & E_n \end{pmatrix}$$

äquivalent. Dasselbe besitzt also dann und nur dann lauter ganze Elementartheiler, wenn *alle* Elemente (a_{ik}) ganze Grössen sind.

---

*) Der Fall, dass die Systeme (a_{ik}) und $(\bar{a}_{ik})$ auch gebrochene Elemente enthalten, ist a. a. O. nicht ausdrücklich erwähnt, jedoch bleibt der dort gegebene Beweis Wort für Wort bestehen, wenn die Elemente beider Systeme nicht ganze Grössen sind.

Es sei nun y eine beliebige ganze oder gebrochene algebraische Function von x, welche durch die Gleichung:

$$y^n + a_1(x) y^{n-1} + \cdots + a_n(x) = 0$$

definirt ist, und es werden wie vorher durch $y_1, \ldots, y_n$ die n conjugirten Werthe von y bezeichnet. Ferner seien:

$$Y^{(1)}, \quad Y^{(2)}, \quad \ldots, \quad Y^{(n)}$$

n beliebige rationale Functionen von y und x, oder, was dasselbe ist, n Grössen des durch y constituirten Gattungsbereiches oder Körpers algebraischer Functionen. Ich bezeichne jetzt allgemein durch:

$$Y_1^{(i)}, \quad Y_2^{(i)}, \quad \ldots, \quad Y_n^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

die n zu $Y^{(i)}$ conjugirten algebraischen Functionen, welche man also erhält, wenn man in $Y^{(i)}$ für y der Reihe nach $y_1, \ldots, y_n$ einsetzt, und ich betrachte das quadratische System:

$$(Y_k^{(i)}) = \begin{pmatrix} Y_1^{(1)} & Y_1^{(2)} & \ldots & Y_1^{(n)} \\ Y_2^{(1)} & Y_2^{(2)} & \ldots & Y_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_n^{(1)} & Y_n^{(2)} & \ldots & Y_n^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Greift man aus diesem Systeme irgend eine Unterdeterminante von einer beliebigen Ordnung h heraus, so ist sie ebenfalls eine algebraische Function von x, denn sie ist rational aus x und aus h unter den n conjugirten Functionen $y_1, \ldots, y_n$ zusammengesetzt.

Betrachtet man jetzt weiter das vollständige System aller Unterdeterminanten derselben $h$ten Ordnung so bleibt dasselbe ungeändert, wenn man irgend zwei conjugirte Functionen y_r und y_s mit einander vertauscht; denn einer solchen Permutation entspricht ja die Vertauschung der $r$ten und $s$ten Zeile in dem Systeme $(Y_k^{(i)})$. Daraus folgt aber, dass jenes System aus einer Anzahl von algebraischen Functionen nebst *allen* ihren Conjugirten besteht, denn das System enthält alle die algebraischen Functionen, welche aus einer jeden dieser Determinanten durch alle Vertauschungen der Grössen $y_1, \ldots, y_n$ hervorgehen, d. h. alle zu einer solchen Determinante conjugirten algebraischen Functionen. Hieraus ergiebt sich mit Hülfe des am Ende des ersten Abschnittes bewiesenen Satzes, dass der grösste gemeinsame Theiler D_h aller jener Determinanten $h$ter Ordnung eine Wurzelfunction von x ist, welche aus den Coefficienten $a_1, \ldots, a_n$ der Gleichung für y rational bestimmt werden kann.

Bezeichnet man also wiederum mit $D_1, D_2, \ldots, D_n$ die Determinantentheiler, mit $E_1, E_2, \ldots, E_n$ die Elementartheiler des algebraischen Systemes $(Y_k^{(i)})$, so sind beide Reihen von Functionen rational bestimmbare Wurzelfunctionen von x, und aus den oben angegebenen Sätzen, welche, wie bemerkt, auch für algebraische Systeme gültig bleiben, folgt zunächst, dass $E_1, \ldots, E_n$ dann und nur dann *ganze* Wurzelfunctionen sind, wenn alle Elemente $Y_k^{(i)}$ für jeden endlichen Werth von x endlich, wenn also $Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)}$ sämmtlich *ganze* algebraische Functionen von x sind.

Ich bilde nun die Theiler

$$d_1(x),\quad d_2(x),\quad \ldots,\quad d_n(x)$$

der je n conjugirten algebraischen Functionen $(Y_1^{(1)}, \ldots, Y_n^{(1)}), \ldots, (Y_1^{(n)}, \ldots, Y_n^{(n)})$, welche in dem Systeme $(Y_k^{(i)})$ in derselben Verticalreihe stehen; auch sie sind rational bestimmbare Wurzelfunctionen von x, und die Quotienten

$$Z_k^{(i)} = \frac{Y_k^{(i)}}{d_i(x)}$$

sind sämmtlich *ganze* algebraische Functionen von x. Hieraus folgt für die Systeme $(Y_k^{(i)})$ und $(Z_k^{(i)})$ die Compositionsgleichung:

$$(Y_k^{(i)}) = (Z_k^{(i)}).(d_i),$$

wo (d_i) das aus den n Wurzelfunctionen $d_1, d_2, \ldots, d_n$ gebildete Diagonalsystem:

$$(d_i) = \begin{pmatrix} d_1(x), & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & d_2(x), & \ldots, & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0, & 0, & \ldots, & d_n(x) \end{pmatrix}$$

bedeutet. Da das System $(Z_k^{(i)})$ lauter algebraisch ganze Elemente besitzt, so ist $(Y_k^{(i)})$ ein ganzes Vielfaches des Diagonalsystemes $(d_i(x))$ in dem oben angegebenen Sinne des Wortes; nach dem a. a. O. ausgesprochenen Satze sind demnach die Elementartheiler $E_1(x), \ldots, E_n(x)$ von $(Y_k^{(i)})$ Vielfache der entsprechenden Elementartheiler $e_1(x), \ldots, e_n(x)$ des Diagonalsystemes $(d_i(x))$.

Die Elementartheiler eines beliebigen aus Wurzelfunctionen bestehenden Diagonalsystems $(d_i(x))$ können leicht angegeben werden. Um zu entscheiden, wie oft *ein bestimmter* Linearfactor $x-a$ in jedem dieser n Elementartheiler $e_1, \ldots, e_n$ enthalten ist, denke man sich die Elemente

$d_1, \ldots, d_n$ von vornherein so geordnet, dass jede Function $d_i(x)$ gerade diesen Linearfactor eben so oft oder öfter enthält als die vorhergehende $d_{i-1}(x)$; dann leuchtet ohne weiteres ein, dass bei dieser Anordnung $e_i(x)$ die gleiche Potenz von $x-a$ enthält als $d_i(x)$. Die Elementartheiler eines Diagonalsystemes $(d_i(x))$ enthalten also genau dieselben Linearfactoren und auch zu denselben gebrochenen Potenzen erhoben wie die Elemente $d_i(x)$; jedoch stimmen diese Theiler $e_1, \ldots, e_n$ im allgemeinen nicht mit den Functionen $d_1, \ldots, d_n$ überein, vielmehr enthält der $i$te Elementartheiler $e_i(x)$ jeden der Linearfactoren $x-a$ von $d_1, \ldots, d_n$ in derjenigen Potenz, deren Exponent unter den in $d_1, \ldots, d_n$ enthaltenen Potenzen von $x-a$ der Grösse nach die $i$te Stelle einnimmt.

Da das System $(Y_k^{(i)})$ stets ein ganzes Vielfaches des aus den Theilern $d_1, \ldots, d_n$ von $Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)}$ gebildeten Diagonalsystemes ist, so können die Elementartheiler $e_1, \ldots, e_n$ des letzteren höchstens gleich den Elementartheilern $E_1, \ldots, E_n$ von $(Y_k^{(i)})$ sein. Besonders interessant und wichtig für das Folgende ist nun der Fall, dass diese Theiler $e_1, \ldots, e_n$ wirklich mit $E_1, \ldots, E_n$ übereinstimmen. Alsdann ist das System $(Y_k^{(i)})$ dem Diagonalsystem $(d_i(x))$ äquivalent, oder die Determinante des Systemes der ganzen algebraischen Functionen

$$(Z_k^{(i)}) = \left(\frac{Y_k^{(i)}}{d_i(x)}\right)$$

reducirt sich auf eine Constante, es kann also $(Z_k^{(i)})$ als ein algebraisches Einheitssystem bezeichnet werden. Ein solches System $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ von algebraischen Functionen soll als ein ***kanonisches System*** bezeichnet werden. Ist dagegen die Determinante von $(Z_k^{(i)})$ nur durch einen bestimmten Linearfactor $x-a$ nicht theilbar, während sie andere enthalten kann, so besitzt $(Z_k^{(i)})$ nur in Bezug auf $x-a$ den Charakter eines Einheitssystemes, und die Elementartheiler $E_1, \ldots, E_n$ von $(Y_k^{(i)})$ enthalten ***diesen*** Linearfactor genau ebenso oft, als die entsprechenden Elementartheiler des Systemes $(d_i(x))$ oder also die in $E_1, \ldots, E_n$ enthaltenen Potenzen von $x-a$ stimmen abgesehen von ihrer Reihenfolge mit denjenigen Potenzen desselben Linearfactors überein, welche in den Theilern $d_1, d_2, \ldots, d_n$ von $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots, Y^{(n)}$ auftreten. Ein solches System $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ soll ein ***kanonisches System in Bezug auf den Linearfactor*** $x-a$ genannt werden.

Den einfachsten Fall eines solchen kanonischen Systemes erhält man bei dem Systeme:

$$\begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 & \dots & y_1^{n-1} \\ 1 & y_2 & y_2^2 & \dots & y_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y_n & y_n^2 & \dots & y_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

wenn y eine beliebige Wurzelfunction $n$ter Ordnung bedeutet, wenn also $y_1, \dots, y_n$ die n conjugirten Wurzeln der reinen Gleichung:

$$y^n = a(x)$$

sind, und $a(x)$ eine beliebige rationale Function von x bedeutet. Hier ist nämlich: $y_k = \omega_k a^{\frac{1}{n}}$, wo $\omega_1, \dots, \omega_n$ die n conjugirten $n$ten Wurzeln der Einheit bedeuten, also ist:

$$y_k^i = \omega_k^i . a^{\frac{i}{n}}$$

d. h. alle Elemente $Z_k^{(i)} = \omega_k^i$ sind selbst Constanten, und die Theiler $d_1, d_2, \dots; d_n$ der Verticalreihen unseres Systems sind hier bezw. gleich $1, a^{\frac{1}{n}}, \dots, a^{\frac{n-1}{n}}$. Das obige System ist also ein kanonisches, und seine Elementartheiler können demnach aus den n Wurzelfunctionen

$$(1, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{2}{n}}, \dots, a^{\frac{n-1}{n}})$$

unmittelbar gefunden werden.

§ 3.

Die Beziehungen zwischen algebraischen Systemen. Die Fundamentalsysteme.

Sind $(Y^{(1)}, \dots, Y^{(n)})$ ein beliebiges System algebraischer Functionen, für welche die Determinante:

$$|Y_k^{(i)}| \gtrless 0$$

ist, so kann bekanntlich jede rationale Function Y von x und y, d. h. jede Grösse des betrachteten Körpers auf eine und nur eine Weise in der Form:

$$Y = u_1 Y^{(1)} + u_2 Y^{(2)} + \dots + u_n Y^{(n)}$$

dargestellt werden, in welcher $u_1, \dots, u_n$ rationale Functionen von x allein bedeuten.

Es sei nun $(Y^{(1)}, \dots, Y^{(n)})$ irgend ein System mit nicht verschwindender Determinante, $(\overline{Y}^{(1)}, \dots, \overline{Y}^{(n)})$ ein beliebig gewähltes anderes System, dann können nach dem soeben Gesagten die Elemente $\overline{Y}_i$ durch das System

$(Y_1, \ldots, Y_n)$ folgendermassen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \overline{Y}^{(1)} &= u_{11} Y^{(1)} + \cdots + u_{1n} Y^{(n)}, \\ &\vdots \\ \overline{Y}^{(n)} &= u_{n1} Y^{(1)} + \cdots + u_{nn} Y^{(n)}, \end{aligned}$$

wo die Substitutionscoefficienten (u_{ik}) rationale Functionen von x bedeuten. Da nun diese n Gleichungen bestehen bleiben, wenn man für $\overline{Y}^{(1)}, \ldots, \overline{Y}^{(n)}$ und $Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)}$ gleichzeitig die conjugirten Systeme einführt, so erkennt man, dass die beiden Systeme $(\overline{Y}_k^{(i)})$ und $(Y_k^{(i)})$ mit einander durch die Compositionsgleichung:

$$(1.) \qquad (\overline{Y}_k^{(i)}) = (Y_k^{(i)})(u_{ik})$$

verbunden sind.

Es seien nun speciell die Elemente $\overline{Y}^{(i)}$ durch das System $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ so darstellbar, dass alle Coefficienten u_{ik} *ganze* Functionen von x sind. In diesem Falle soll das System $(\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_n)$ ein *Vielfaches* von $(Y_1, \ldots, Y_n)$, oder das zweite ein *Theiler* des ersten genannt werden. Diese Definition ist eine consequente Erweiterung der *Kronecker*schen Terminologie, denn unter der hier gemachten Voraussetzung ist ja das Divisorensystem $(\overline{Y}^{(1)}, \ldots, \overline{Y}^{(n)})$ in der That durch $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ theilbar; hier kommt nur noch die weitere Forderung hinzu, dass die Coefficienten u_{ik} nicht bloss ganze algebraische sondern ganze rationale Functionen von x sein sollen.

Ist nun $(\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_n)$ ein Vielfaches von $(Y_1, \ldots, Y_n)$, so ergiebt sich aus (1.), dass auch das System $(\overline{Y}_k^{(i)})$ ein Vielfaches von $(Y_k^{(i)})$ ist, und nach dem oben erwähnten Satze sind dann die Elementartheiler $\overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_n$ des ersten ebenfalls Vielfache der entsprechenden Elementartheiler $E_1, \ldots, E_n$ des zweiten Systemes; es bestehen also n Gleichungen

$$\overline{E}_i = M_i E_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

in welchen die n Grössen M_i *ganze* algebraische Functionen von x sind; und da $\overline{E}_i$ und E_i beide Wurzelfunctionen von x waren, so sind $M_1, \ldots, M_n$ ganze Wurzelfunctionen von x. Die beiden Reihen von Wurzelfunctionen E_i und $\overline{E}_i$ unterscheiden sich also von einander um ganze Wurzelfunctionen von x. Das hier gefundene Resultat kann jetzt in dem folgenden Satze ausgesprochen werden.

Ist ein System algebraischer Functionen $(\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_n)$ durch ein anderes $(Y_1, \ldots, Y_n)$ mit rationalen ganzen Coefficienten darstell-

bar, so sind die Elementartheiler $\overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_n$ des ersten Vielfache der entsprechenden Elementartheiler $E_1, \ldots, E_n$ des anderen Systemes*).

Ist von den beiden Systemen $(\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_n)$ und $(Y_1, \ldots, Y_n)$ das erste in dem zweiten enthalten, und auch umgekehrt das zweite in dem ersten, so heissen dieselben *äquivalent;* alsdann sind die entsprechenden Elementartheiler beider Systeme einander gleich.

Unter einem *Fundamentalsysteme* will ich zunächst mit *Kronecker* ein System $(Y_1, \ldots, Y_n)$ von n ganzen algebraischen Functionen verstehen, durch welche jede ganze algebraische Function des Bereiches homogen und linear mit ganzen Functionen von x als Coefficienten dargestellt werden kann. Doch will ich gleich bemerken, dass diese *Kronecker*schen Fundamentalsysteme nur solange ihren Namen verdienen, als man die unabhängige Variable x auf endliche Werthe beschränkt. Für ein unbeschränkt veränderliches x muss dagegen das *Kronecker*sche Fundamentalsystem nothwendig durch ein anderes ersetzt werden, wie dies im § 7 ausgeführt werden wird. Doch gelten die hier abzuleitenden Sätze unverändert für jenes allgemeinere Fundamentalsystem, und daher soll zunächst auf diese erste Art von Systemen eingegangen werden.

Die oben gegebene Definition kann nun durch die folgende ersetzt werden: Ein algebraisch ganzes System $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ist ein Fundamentalsystem, wenn es in jedem anderen *ganzen* Systeme $(\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_n)$ enthalten, wenn es also der grösste gemeinsame Theiler *aller* ganzen algebraischen Systeme ist. Unter dieser Voraussetzung sind aber auch die Elementartheiler $E_1, \ldots, E_n$ jenes Systemes ebenfalls in den entsprechenden Elementartheilern jedes anderen ganzen Systemes enthalten, und da ferner jene Elementartheiler dann und nur dann ganze Wurzelfunctionen sind, wenn die Elemente $Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)}$ sämmtlich algebraisch ganz sind, so kann ein Fundamentalsystem als solches nunmehr folgendermassen charakterisirt werden:

> Ein System $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ist nur dann ein (*Kronecker*sches) Fundamentalsystem, wenn jeder seiner n Elementartheiler $E_1, \ldots, E_n$ ganz und der grösste gemeinsame Theiler der entsprechenden Elementartheiler aller anderen ganzen Systeme $(\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_n)$ ist.

*) Man erkennt leicht, dass dieser Satz bestehen bleibt, auch wenn die Determinante $|Y_k^{(i)}| = 0$ ist, wenn also einer oder mehrere der Elementartheiler $E_1, \ldots, E_n$ verschwinden; ich werde aber in dieser Arbeit von dieser Verallgemeinerung keinen Gebrauch machen.

Bekanntlich hat *Kronecker* den entsprechenden Satz nur für die *Determinante* eines Fundamentalsystemes also für das *Product* $(E_1 E_2 \dots E_n)^2$ aufgestellt und bewiesen, weil er sich mit den Elementartheilern algebraischer Systeme noch nicht beschäftigt hat. Dieses Resultat *Kroneckers* ist an sich fast selbstverständlich und offenbar eine nothwendige Folge des obigen Satzes. Dagegen deckt jener Satz selbst eine viel tiefer liegende Eigenschaft des Fundamentalsystemes auf; mit seiner Hülfe werden wir nunmehr ein Verfahren angeben, durch das man, allein aus den Elementartheilern eines beliebigen Systemes unmittelbar die Elementartheiler des zugehörigen Fundamentalsystemes finden kann, oder auch ein Verfahren, um die sogenannte Gattungsdiscriminante direct aus den Coefficienten $a_1, \dots, a_n$ der definirenden Gleichung für y herzuleiten.

§ 4.

Die charakteristische Eigenschaft der Fundamentalsysteme.

Die Frage, auf welche sich die am Ende des vorigen Abschnittes angegebenen Probleme zurückführen lassen, findet ihre Beantwortung durch den folgenden Satz:

> Ein System $(Y_1, \dots, Y_n)$ ist dann und nur dann ein Fundamentalsystem, wenn seine Elementartheiler ganze Wurzelfunctionen sind, deren Linearfactoren sämmtlich echt gebrochene Exponenten haben.

Oder einfacher mit Benutzung der oben angegebenen Bezeichnung:

> Ein System $Y_1, \dots, Y_n$ ist stets und nur dann ein Fundamentalsystem, wenn seine Elementartheiler reducirte ganze Wurzelfunctionen sind.

Der erste Theil dieses wichtigen Satzes lässt sich durch die folgenden einfachen Schlüsse beweisen: Ist $(Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(n)})$ ein System der angegebenen Art, dessen Determinante

$$\varDelta = |Y_k^{(i)}|$$

also nicht identisch verschwindet, so kann jede algebraische Function Y nebst ihren conjugirten $(Y_1, \dots, Y_n)$ folgendermassen dargestellt werden:

$$(1.)\qquad \begin{cases} Y_1 = u_1 Y_1^{(1)} + \dots + u_n Y_1^{(n)}, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ Y_n = u_1 Y_n^{(1)} + \dots + u_n Y_n^{(n)}, \end{cases}$$

wo $u_1, \dots, u_n$ rationale ganze oder gebrochene Functionen von x sind. Da



nun zunächst die Elementartheiler $E_1, \dots, E_n$ n. d. V. ganze Wurzelfunctionen sind, so sind $Y^{(1)}, \dots, Y^{(n)}$ algebraisch ganz; sind also $u_1, \dots, u_n$ ganze Functionen von x, so gilt dasselbe von den durch die obigen Gleichungen definirten conjugirten Functionen $Y_1, \dots, Y_n$. Ist umgekehrt Y algebraisch ganz, so ist zu zeigen, dass dann $u_1, \dots, u_n$ nothwendig ebenfalls *ganze* Functionen von x sein müssen. Aus den n Gleichungen (1.) erhält man aber durch Auflösung für $u_1, \dots, u_n$ die folgenden Werthe:

$$(2.) \qquad u_h = \frac{\Delta_h}{\Delta}, \qquad (h = 1, 2, \dots, n)$$

wo Δ_h aus der Determinante $\Delta = |Y_k^{(i)}|$ dadurch hervorgeht, dass dort die Elemente der $h$ten Colonne durch die conjugirten *ganzen* algebraischen Functionen $Y_1, \dots, Y_n$ ersetzt werden. Entwickelt man also Δ_h nach jener Colonne, so ergiebt sich

$$\Delta_h = Y_1 \Delta_h^{(1)} + \dots + Y_n \Delta_h^{(n)},$$

wo die Coefficienten $\Delta_h^{(1)}, \dots, \Delta_h^{(n)}$ Unterdeterminanten $(n-1)$-ter Ordnung von $|Y_k^{(i)}|$ sind. Als solche sind sie aber durch den gemeinsamen Theiler *aller* Unterdeterminanten $(n-1)$-ter Ordnung von Δ, d. h. durch $E_1 E_2 \dots E_{n-1}$ theilbar, und da die im Nenner von (2.) stehende Determinante $\Delta = E_1 E_2 \dots E_n$ ist, so kann der aus (2.) sich ergebende Werth von u_h folgendermassen geschrieben werden:

$$u_h = \frac{E_1 \dots E_{n-1} G_h}{E_1 \dots E_{n-1} E_n} = \frac{G_h}{E_n},$$

wo G_h eine ganze algebraische Function von x ist. Hätte also u_h in der reducirten Form einen Nenner, so müsste dieser ein Theiler der Wurzelfunction E_n sein. Da diese aber nach der Voraussetzung aus lauter Linearfactoren mit *echt* gebrochenen Exponenten besteht, so besitzt sie keinen *rationalen* Theiler, die Coefficienten $u_1, \dots, u_n$ sind also sämmtlich ganze Functionen von x. Das System $(Y_1, \dots, Y_n)$ ist demnach wirklich ein Fundamentalsystem.

Es ist nun der Umstand von grosser Wichtigkeit, dass der eben bewiesene Satz umkehrbar ist, dass also, wie der zweite Theil des oben ausgesprochenen Satzes besagt, ein System $(Y^{(1)}, \dots, Y^{(n)})$ nur dann ein Fundamentalsystem sein kann, wenn alle Elementartheiler von $(Y_k^{(i)})$ ganze Wurzelfunctionen sind, deren Linearfactoren sämmtlich echt gebrochene Exponenten haben.

Dieser Satz ist bewiesen, wenn man zeigen kann, dass man von einem beliebigen Systeme $(\overline{Y}^{(1)}, \ldots, \overline{Y}^{(n)})$ ausgehend stets zu einem anderen $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ gelangen kann, dessen Elementartheiler ganze reducirte Wurzelfunctionen sind; nach dem eben bewiesenen Satze ist das letztere dann nämlich ein Fundamentalsystem, und jedes andere Fundamentalsystem besitzt dann dieselbe Eigenschaft, weil es dem Systeme $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ äquivalent ist, also dieselben Elementartheiler besitzt wie dieses.

Am einfachsten gestaltet sich nun dieser Beweis, wenn das System $(\overline{Y}^{(1)}, \ldots, \overline{Y}^{(n)})$, von welchem wir ausgehen, ein kanonisches ist. In der That, ist

$$\overline{Y}^{(i)} = d_i(x) Z^{(i)}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

wo $d_i(x)$ eine Wurzelfunction, $Z^{(i)}$ eine ganze algebraische Function ist, und wo die Determinante $|Z_k^{(i)}|$ sich auf eine Constante reducirt, und bilden wir das System:

$$Y^{(i)} = \frac{\overline{Y}^{(i)}}{[d_i(x)]} = R(d_i(x)).Z^{(i)},$$

wo also wieder $[d_i(x)]$ den grössten rationalen Theiler von $d_i(x)$ und $R(d_i(x))$ den kleinsten Rest dieser Wurzelfunction bedeutet, so ist dies neue System $(Y_k^{(i)})$ äquivalent dem aus den Wurzelfunctionen $R(d_i(x))$ gebildeten Diagonalsysteme:

$$(3.) \qquad (R(d_i(x))). \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Da aber diese kleinsten Reste ganze reducirte Wurzelfunctionen sind, so gilt das Gleiche von den Elementartheilern des Systemes (3), weil diese dieselben Linearfactoren nur in anderer Reihenfolge enthalten. Da hiernach die Elementartheiler des äquivalenten Systemes $(Y^{(i)})$ dieselbe Eigenschaft haben, so ist das System $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ ein Fundamentalsystem.

Geht man z. B. von der reinen Gleichung

$$y^n = a(x)$$

aus, wo $a(x)$ eine beliebige rationale Function von x bedeutet, so folgt hieraus, dass das System

$$1, \quad \frac{y}{\left[a^{\frac{1}{n}}\right]}, \quad \frac{y^2}{\left[a^{\frac{2}{n}}\right]}, \quad \ldots, \quad \frac{y^{n-1}}{\left[a^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

ein Fundamentalsystem ist, man hat also den Satz:

Ist $y = a^{\frac{1}{n}}$, so ist jede *ganze* algebraische Function des durch (y, x)



constituirten Gattungsbereiches auf eine und nur eine Weise in der Form

$$u_0 + u_1 \frac{y}{\left[a^{\frac{1}{n}}\right]} + \cdots + u_{n-1} \frac{y^{n-1}}{\left[a^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

darstellbar, wo $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ beliebige ganze Functionen von x bedeuten.

Man kann aber auch von $(\overline{Y}^{(1)}, \ldots, \overline{Y}^{(n)})$ zu einem Fundamentalsysteme der angegebenen Art übergehen, wenn dieses System nicht selbst kanonisch, wohl aber einem kanonischen Systeme äquivalent ist, denn man kann ja dieses zuerst in das äquivalente kanonische System transformiren, und hierauf das letztere auf die soeben angegebene Weise in ein Fundamentalsystem der verlangten Art überführen. Der Hauptsatz wäre also bewiesen, wenn man die Richtigkeit des folgenden Satzes darthun könnte:

Jedes System ist einem kanonischen Systeme äquivalent.

Dieser merkwürdige Satz ist in der That richtig und soll in einer späteren Arbeit bewiesen werden. Für den vorliegenden Zweck genügt es, denselben nur für einen beliebigen Linearfactor $x-a$ zu beweisen; ist das nämlich geschehen, so kann man das ursprüngliche System $(\overline{Y}^{(1)}, \ldots, \overline{Y}^{(n)})$ zuerst in ein äquivalentes überführen, welches in Bezug auf einen Linearfactor $x-a$ kanonisch ist, und dieses dann auf die oben angegebene Art in ein anderes $(\overline{\overline{Y}}^{(1)}, \ldots, \overline{\overline{Y}}^{(n)})$ transformiren, dessen Elementartheiler den Linearfactor $x-a$ nur erhoben zu positiven echt gebrochenen Exponenten enthalten. Im übrigen stimmen die Elementartheiler des neuen Systemes $(\overline{\overline{Y}}_1, \ldots, \overline{\overline{Y}}_n)$ mit denen von $(\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_n)$ überein, weil das Transformationssystem, welches das eine in das andere überführt, in Bezug auf jeden anderen Linearfactor den Charakter eines Einheitssystemes hat. Das so erhaltene System $(\overline{\overline{Y}}_1, \ldots, \overline{\overline{Y}}_n)$ kann nun wieder in ein anderes übergeführt werden, dessen Elementartheiler in Bezug auf einen zweiten Linearfactor $x-a'$ dieselbe Eigenschaft haben, und da die Elementartheiler des ursprünglichen Systemes überhaupt nur eine endliche Anzahl von Linearfactoren haben, so gelangt man durch Fortsetzung dieses Verfahrens zuletzt zu einem Systeme, dessen Elementartheiler *jeden* Linearfactor erhoben zu einem positiven echt gebrochenen Exponenten enthalten, welches also ein Fundamentalsystem der verlangten Art ist. Der Beweis des im Anfange dieses Abschnittes angegebenen Satzes ist also vollständig zurückgeführt auf den folgenden:

Jedes System $(\overline{Y}^{(1)}, \ldots, \overline{Y}^{(n)})$ ist äquivalent einem anderen $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$, welches in Bezug auf einen beliebigen Linearfactor $x-a$ kanonisch ist.

Der Beweis dieses Satzes soll im nächsten Abschnitte gegeben werden.

§ 5.

Reduction eines Systemes auf die kanonische Form.

Es sei also jetzt

$$\overline{Y}^{(1)}, \quad \overline{Y}^{(2)}, \quad \ldots, \quad \overline{Y}^{(n)}$$

ein beliebig gegebenes System algebraischer Functionen unseres Bereiches mit nicht verschwindender Determinante $|\overline{Y}_k^{(i)}|$, und es sei allgemein $(x-a)^{\delta_i}$ die Potenz des Linearfactors $x-a$, welche in dem grössten gemeinsamen Theiler der conjugirten Functionen $\overline{Y}_1^{(i)}, \ldots, \overline{Y}_n^{(i)}$ enthalten ist. Setzt man dann allgemein:

$$(1.) \qquad \overline{Y}^{(i)} = (x-a)^{\delta_i} \overline{Z}^{(i)},$$

so haben die n Functionen $\overline{Z}^{(1)}, \ldots, \overline{Z}^{(n)}$ an der Stelle $x = a$ den Charakter von ganzen algebraischen Functionen; jede von ihnen ist nämlich nebst ihren n conjugirten an jener Stelle endlich.

Um die rational gebrochenen Exponenten von $x-a$ durch ganze zu ersetzen, führe ich an Stelle von x eine neue unabhängige Variable t ein: Es sei nämlich ν der kleinste gemeinsame Nenner der n Exponenten $\delta_1, \ldots, \delta_n$, es sei also allgemein:

$$\delta_i = \frac{\nu_i}{\nu}. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Ist dann t irgend eine der ν conjugirten Wurzeln

$$t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \quad t_\nu$$

der reinen Gleichung:

$$t^\nu = x-a,$$

welche sich nur durch νte Wurzeln der Einheit von einander unterscheiden, und ersetzt man in der Definitionsgleichung für y die unabhängige Variable x durch ihren Werth $a+t^\nu$, so wird y eine algebraische Function von t, und $\overline{Y}^{(1)}, \ldots, \overline{Y}^{(n)}$ gehen in rationale Functionen von y und t über. Die Gleichungen (1.) nehmen jetzt die folgende Gestalt an:

$$\overline{Y}^{(i)} = t^{\nu_i} \overline{Z}^{(i)},$$

wo $\overline{Z}^{(1)}, \ldots, \overline{Z}^{(n)}$ rationale Functionen von t und y sind, welche für $t=0$ endlich bleiben, und wo y eine algebraische Function von t ist. Die Exponenten $\nu_1, \ldots, \nu_n$ sind nun ganze positive oder negative Zahlen, und es mögen $\overline{Y}^{(1)}, \ldots, \overline{Y}^{(n)}$ von vorn herein so angeordnet sein, dass $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ der Grösse nach auf einander folgen.

Es sei nun das System $(\overline{Y}^{(1)}, \ldots, \overline{Y}^{(n)})$ kein kanonisches in Bezug auf den Linearfactor t, es möge also die Determinante $|\overline{Z}_k^{(i)}|$ noch durch eine Potenz von t theilbar sein, so dass sie für $t=0$ verschwindet. Ich will nachweisen, dass man dann dieses System durch ein äquivalentes ersetzen kann, in welchem ein Element eine höhere Potenz von t enthält als dies vorher der Fall war, während alle anderen unverändert bleiben. Durch Fortsetzung desselben Verfahrens gelangt man dann zuletzt zu einem äquivalenten Systeme $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$, für welches die entsprechende Determinante $|Z_k^{(i)}|$ für $t=0$ nicht verschwindet, welches also in Bezug auf den Linearfactor t ein kanonisches System ist.

Angenommen nun, es verschwinde die Determinante des Systemes $(\overline{Z}_k^{(i)})$ für $t=0$, so kann man bekanntlich n nicht sämmtlich verschwindende Constanten $a_1, \ldots, a_n$ so bestimmen, dass die lineare Function

$$Z = a_1\overline{Z}^{(1)}+\cdots+a_n\overline{Z}^{(n)}$$

nebst allen ihren n Conjugirten für $t=0$ gleich Null ist, denn für $t=0$ reduciren sich ja n. d. V. die n^2 Functionen $(\overline{Z}_k^{(i)})$ auf *endliche* Constanten, deren Determinante verschwindet. Es seien nun $a_1, \ldots, a_n$ irgendwie dieser Bedingung gemäss bestimmt, es möge a_r die letzte nicht verschwindende Constante sein, und wir denken uns diese der Einfachheit wegen durch Division zu 1 gemacht. Es sei dann die so sich ergebende Function

$$Z^{(r)} = a_1\overline{Z}^{(1)}+a_2\overline{Z}^{(2)}+\cdots+\overline{Z}^{(r)}.$$

Die Coefficienten der Gleichung $n$ten Grades, welcher diese Function $Z^{(r)}$ nebst ihren n Conjugirten genügt, sind also rationale Functionen von t, welche für $t=0$ sämmtlich verschwinden, sie sind also alle von der Form:

$$tR(t),$$

wo $R(t)$ für $t=0$ endlich ist; und hieraus ergiebt sich endlich, dass $Z^{(r)}$ durch eine *positive* ganze oder gebrochene Potenz von t, etwa durch t^ϱ algebraisch theilbar ist.

Es war hier t irgend eine der ν conjugirten Wurzeln der Gleichung
$$t^\nu = x-a;$$
ersetzt man aber t in dem Ausdrucke von $Z^{(r)}$ durch irgend eine andere jener ν Wurzeln, etwa durch ωt, so gehen die Coefficienten $tR(t)$ der Gleichung für $Z^{(r)}$ einfach über in $\omega t.R(\omega t)$, sind also ebenfalls alle und zwar durch dieselbe Potenz von t theilbar, wie vorher. Die Function $Z^{(r)}$ ist also nicht nur selbst durch t^ϱ theilbar, sondern sie bleibt es auch, wenn man in ihr t der Reihe nach durch die ν conjugirten Wurzeln $t_1, \ldots, t_\nu$ ersetzt.

Ersetzt man jetzt in dem Ausdrucke von $Z^{(r)}$ die Functionen $\overline{Z}$ durch die $\overline{Y}$, so geht er über in:
$$a_1 \frac{\overline{Y}^{(1)}}{t^{\nu_1}} + a_2 \frac{\overline{Y}^{(2)}}{t^{\nu_2}} + \cdots + \frac{\overline{Y}^{(r)}}{t^{\nu_r}}$$
oder, wenn man auf gleichen Nenner bringt, und beachtet, dass nach der oben gewählten Anordnung die Exponenten $\nu_1, \ldots, \nu_r$ der Grösse nach auf einander folgen:
$$\frac{a_1 t^{\mu_1}\overline{Y}^{(1)} + a_2 t^{\mu_2}\overline{Y}^{(2)} + \cdots + \overline{Y}^{(r)}}{t^{\nu_r}},$$
wo zur Abkürzung die nicht negativen ganzen Zahlen:
$$\nu_r - \nu_i = \mu_i$$
gesetzt sind.

Wir wollen t irgend einen seiner ν Werthe t_i beilegen und dann den Zähler dieses Bruches durch $Y^{(r)}(t_i)$ bezeichnen. Dann ist bewiesen, dass $Y^{(r)}(t_i)$ für jeden der ν Werthe $t_1, \ldots, t_\nu$ nicht bloss durch t^{ν_r}, sondern durch die höhere Potenz $t^{\nu_r+\varrho}$ algebraisch theilbar ist. Hieraus folgt, dass auch die Summe der ν Functionen $Y^{(r)}(t_1), \ldots, Y^{(r)}(t_\nu)$ ebenfalls mindestens durch $t^{\nu_r+\varrho}$ divisibel ist, und da diese die Form hat:
$$a_1(t_1^{\mu_1}+\cdots+t_\nu^{\mu_1})\overline{Y}^{(1)}+\cdots+a_{r-1}(t_1^{\mu_{r-1}}+\cdots+t_\nu^{\mu_{r-1}})\overline{Y}^{(r-1)}+\nu\overline{Y}^{(r)},$$
also in $t_1, \ldots, t_\nu$ symmetrisch ist, so sind alle Coefficienten *ganze* Functionen von x allein. Dividirt man diese Summe noch durch die positive ganze Zahl ν, welche den Coefficienten von $\overline{Y}^{(r)}$ bildet, und bezeichnet die so sich ergebende Function durch $Y^{(r)}$, so ist diese mindestens durch
$$t^{\nu_r+\varrho} = (x-a)^{\delta_r+\frac{\varrho}{\nu}}$$
algebraisch theilbar, und man erhält den Satz:

Ist $\overline{Y}^{(1)}, \ldots, \overline{Y}^{(n)}$ irgend ein System algebraischer Functionen, ist ferner allgemein:

$$\overline{Y}^{(i)} = (x-a)^{\delta_i}\overline{\overline{Z}}^{(i)}$$

und verschwindet die Determinante $|\overline{Z}_k^{(i)}|$ für $x = a$, so kann man eine Function

$$Y^{(r)} = A_1(x)\overline{Y}^{(1)}+\cdots+A_{r-1}(x)\overline{Y}^{(r-1)}+\overline{Y}^{(r)},$$

in welcher $A_1, \ldots, A_{r-1}$ *ganze rationale* Functionen von x sind, so bestimmen, dass sie mindestens durch

$$t^{\nu_r+\varrho} = (x-a)^{\delta_r+\frac{\varrho}{\nu}}$$

algebraisch theilbar ist. Hiernach sind also die beiden Systeme

$$(\overline{Y}^{(1)}, \ldots, \overline{Y}^{(r)}, \ldots, \overline{Y}^{(n)}) \quad \text{und} \quad (\overline{Y}^{(1)}, \ldots, Y^{(r)}, \ldots, \overline{Y}^{(n)})$$

äquivalent, aber $Y^{(r)}$ enthält eine höhere Potenz von $x-a$ als $\overline{Y}^{(r)}$. Da man nun in derselben Weise das zweite System umformen und hiermit so lange fortfahren kann, bis man zu einem für $x-a$ kanonischen Systeme gelangt ist, so folgt, dass jedes System $(\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_n)$ einem in Bezug auf einen beliebigen Linearfactor kanonischen äquivalent ist, und hieraus ergiebt sich, wie oben angegeben, der Beweis für den Satz, dass ein System dann und nur dann ein Fundamentalsystem ist, wenn seine Elementartheiler lauter positive echt gebrochene Exponenten haben.

§ 6.

Jedes quadratische System $(Y_k^{(i)})$ ist nach den Resultaten der vorigen Abschnitte äquivalent einem Diagonalsysteme von Wurzelfunctionen $(d_i(x))$, dessen Elemente durch die Elementartheiler von $(Y_k^{(i)})$ bestimmt sind.

Sind nämlich:

$$(1.)\qquad \begin{cases} (x-a)^{\delta_1}, & (x-a)^{\delta_2}, & \ldots, & (x-a)^{\delta_n}, \\ (x-a')^{\delta'_1}, & (x-a')^{\delta'_2}, & \ldots, & (x-a')^{\delta'_n}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{cases}$$

die gebrochenen Potenzen aller Linearfactoren $x-a,\ x-a', \ldots,$ welche bezw. in dem ersten, zweiten, ..., $n$ten Elementartheiler des Systemes $(Y_k^{(i)})$ enthalten, und welche also rational bestimmbare Invarianten jenes Systemes sind, so bilden speciell die n Elementartheiler:

$$e_i(x) = (x-a)^{\delta_i}(x-a')^{\delta'_i}\ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ein System von n Wurzelfunctionen, welchem $(Y_k^{(i)})$ äquivalent ist. Jedes andere äquivalente System $(d_1(x), \ldots, d_n(x))$ wird aus $(e_1(x), \ldots, e_n(x))$ dadurch gewonnen, dass die Elemente der einzelnen Horizontalreihen des

Systemes (1.) beliebig unter einander vertauscht werden*). Diese einzelnen Systeme $(d_1(x), \ldots, d_n(x))$ sind also unter einander und von den Elementartheilern nicht wesentlich verschieden, es soll aber in den folgenden Sätzen deshalb vorzugsweise auf die Elementartheiler $(e_1(x), \ldots, e_n(x))$ hingewiesen werden, weil diese selbst und nicht bloss ihre Linearfactoren Invarianten des Systemes $(Y_k^{(i)})$ sind, also rational und ohne Kenntniss eines kanonischen Systemes aus jenem gefunden werden können. Man kann nun den folgenden Fundamentalsatz beweisen, welcher die Beziehungen zwischen allen Systemen von n Functionen desselben Körpers klar erkennen lässt.

> Ist $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ irgend ein System von n Functionen des Bereiches $\mathfrak{G}(x, y)$ mit nicht verschwindender Determinante, ist ferner $(d_1(x), \ldots, d_n(x))$ das ihm zugehörige System von Wurzelfunctionen, und $(\overline{Y}^{(1)}, \ldots, \overline{Y}^{(n)})$ irgend ein anderes System desselben Körpers, so gehört zu diesem ein System $(\overline{d}_1(x), \ldots, \overline{d}_n(x))$ von Wurzelfunctionen, welche sich von den entsprechenden des vorigen Systemes um *rationale* Functionen von x unterscheiden, welche also als *rationale* Vielfache bezw. von $d_1(x), \ldots, d_n(x)$ bezeichnet werden können.
>
> Sind umgekehrt $(\overline{d}_1(x), \ldots, \overline{d}_n(x))$ irgend welche rationale Vielfache von $d_1(x), \ldots, d_n(x)$, so existirt stets ein System $(\overline{Y}^{(1)}, \ldots, \overline{Y}^{(n)})$, für welches die zugehörigen Wurzelfunctionen gleich $\overline{d}_1(x), \ldots, \overline{d}_n(x)$ sind.

Nach dem im vorigen Abschnitte geführten Beweise unterscheidet sich nämlich das zu einem beliebigen Systeme $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ gehörige Diagonalsystem von dem eines Fundamentalsystemes in Bezug auf jeden Linearfactor nur durch eine *ganzzahlige* Potenz desselben, also gehen die Wurzelfunctionen des ersten Systemes aus denen des zweiten durch Multiplication mit rationalen Factoren hervor. Da nun irgend zwei Fundamentalsysteme äquivalent sind, also dieselben zugehörigen Wurzelfunctionen haben, so gehen die Wurzelfunctionen jedes Systemes aus denen eines bestimmten, nämlich des Fundamentalsystemes durch Multiplication mit *rationalen* Factoren hervor, und damit ist der erste Theil jenes Satzes bewiesen.

Um auch seinen zweiten Theil zu beweisen, betrachte ich ein beliebiges System $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$, welches in Bezug auf einen Linearfactor

*) Vgl. die ausführliche Darlegung dieser Beziehungen in der Arbeit des Hrn. *Frobenius*: „Ueber lineare Formen mit ganzen Coefficienten." II. Abh. dieses Journal Bd. 88.

$x-a$ kanonisch ist. Dann ist auch das System $(\overline{Y}^{(1)}, \ldots, \overline{Y}^{(n)})$ für $x-a$ kanonisch, dessen Elemente aus jenen durch Multiplication mit beliebigen ganzzahligen Potenzen jenes Linearfactors hervorgehen, für welche also die Gleichungen bestehen:

$$\overline{Y}^{(i)} = (x-a)^{r_i} Y^{(i)};$$

und da diese Substitution für jeden anderen Linearfactor $x-a'$ den Charakter einer umkehrbaren hat, so stimmen die Elementartheiler des zweiten Systemes im übrigen mit denen des ersten überein. Also unterscheiden sich die zu $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ und $(\overline{Y}^{(1)}, \ldots, \overline{Y}^{(n)})$ gehörigen Diagonalsysteme um die beliebig gegebenen ganzzahligen Potenzen $(x-a)^{r_1}, \ldots, (x-a)^{r_n}$ und da nunmehr dieselbe Transformation für beliebige andere Linearfactoren gemacht werden kann, so gelangt man zuletzt zu einem Systeme, dessen zugehörige Wurzelfunctionen gegebene rationale Vielfache der ursprünglichen sind.

Mit Hülfe dieses Satzes ergiebt sich nun die Möglichkeit, die zu einem Fundamentalsysteme gehörigen Wurzelfunctionen ohne die Kenntniss jenes Systemes selbst zu finden. Offenbar kann nämlich die charakteristische Bedingung für ein solches System folgendermassen ausgesprochen werden:

> Ein System ist dann und nur dann ein Fundamentalsystem, wenn die zugehörigen Wurzelfunctionen sämmtlich reducirt sind.

Hieraus folgt also der Satz:

> Ist $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ ein beliebiges System von nicht verschwindender Determinante, und sind $(d_1(x), d_2(x), \ldots, d_n(x))$ die zugehörigen Wurzelfunctionen, so sind:
> $$(R(d_1(x))), \quad \ldots, \quad (R(d_n(x)))$$
> die Wurzelfunctionen des Fundamentalsystemes, wenn allgemein $R(d_i(x))$ der kleinste Rest der Wurzelfunction $d_i(x)$ ist.

Wendet man das hier auseinandergesetzte Verfahren speciell auf die Elementartheiler von $Y_k^{(i)}$ an, so ergiebt sich die folgende einfache Methode zur Bestimmung der einem Fundamentalsysteme zugehörigen Wurzelfunctionen:

> Ist $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ irgend ein System algebraischer Functionen, und sind $e_1(x), \ldots, e_n(x)$ die rational bestimmbaren Elementartheiler von $(Y_k^{(i)})$; dann findet man das System der dem Fundamentalsysteme zugehörigen Wurzelfunctionen, wenn man alle Exponenten von $e_1(x), \ldots, e_n(x)$ auf ihren kleinsten positiven Rest reducirt.

(Fortsetzung folgt.)

Ueber einen neuen Fundamentalsatz in der Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen.

(Fortsetzung der Arbeit S. 276 dieses Bandes.)

(Von Herrn *K. Hensel.*)

§ 7.

Die rationalen und algebraischen homogenen Formen.

Die im ersten Theile dieser Arbeit bewiesenen Sätze über den grössten gemeinsamen Theiler der rationalen und der algebraischen Functionen von x, über die Elementartheiler der Systeme und über die Kriterien für ein Fundamentalsystem beruhen auf der Definition der Theilbarkeit, und diese ist auf den Begriff der ganzen (rationalen und algebraischen) Grössen begründet. Unter einer ganzen Function von x wurde in den vorhergehenden Abschnitten eine Grösse verstanden, welche für den ganzen Bereich dieser Variablen, d. h. für jedes endliche x endlich bleibt.

Diese letzte Definition und damit zunächst auch alle bisher an sie geknüpften Folgerungen werden aber gegenstandslos, wenn man, wie dies in der Theorie der algebraischen Integrale und der *Abel*schen Functionen nothwendig ist, auch die Stelle $x = \infty$ in den Bereich der unabhängigen Veränderlichen x aufnimmt, denn alsdann unterscheiden sich die ganzen von den gebrochenen Functionen nur durch den rein äusserlichen Umstand, dass bei jenen alle Unendlichkeitsstellen an der Stelle $x = \infty$ liegen, während diese solche Stellen auch für endliche Werthe von x besitzen.

Man kann aber statt der rationalen und algebraischen Functionen von der einen Variablen x von vornherein einen grösseren Bereich specieller Functionen von zwei Variablen betrachten, von welchem jene Theilbereiche sind, und in ihnen gelten für den ganzen Bereich der unabhängigen Variablen, den unendlich fernen Punkt mit eingeschlossen, wörtlich dieselben Definitionen und Sätze, wie sie bei jenem specielleren Bereiche nur für end-

liche Werthe von x abgeleitet worden waren. Es sind dies die homogenen rationalen und algebraischen Functionen von x_1 und x_2.

Für die rationalen Functionen von x ist diese Erweiterung wohlbekannt: Unter einer homogenen rationalen Form von (x_1, x_2) versteht man jede rationale ganze oder gebrochene Function $a(x_1, x_2)$, welche sich nur mit einer Potenz von t multiplicirt, wenn x_1 und x_2 durch tx_1, tx_2 ersetzt werden, für welche also eine Functionalgleichung:

$$a(tx_1,\ tx_2) = t^\mu a(x_1,\ x_2)$$

besteht, in der μ irgend eine ganze Zahl bedeutet. Dieser Exponent wird die *Dimension* von a genannt, und auch hier werden die ganzen von den gebrochenen homogenen Formen unterschieden.

Ersetzt man in einer rationalen Function $a(x)$ von x diese Variable durch den Quotienten $\frac{x_1}{x_2}$, so geht sie in eine homogene Form:

$$a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = a(x_1,\ x_2)$$

der nullten Dimension über, und umgekehrt ist jede homogene Form der nullten Dimension einer rationalen Function von $x = \frac{x_1}{x_2}$ gleich. Also bilden die rationalen Functionen von x in der That einen Theilbereich der homogenen Formen, sie stimmen mit der Gesammtheit der Formen der Dimension Null überein.

Eine rationale Function von x kann als Form von (x_1, x_2) betrachtet nur dann ganz sein, wenn sie sich auf eine Constante reducirt, denn schreibt man sie als Quotienten von zwei homogenen ganzen Formen, so sind diese von gleicher Dimension, also kann sich der Nenner nur dann auf die nullte Dimension reduciren, wenn dasselbe für den Zähler gilt. So sieht man, dass die Einführung der homogenen Formen nothwendig ist, wenn der Begriff der ganzen Grössen erhalten bleiben soll.

Jede Form $a(x_1, x_2)$ kann auf eine, und abgesehen von Constanten auch nur auf eine Weise in das Product homogener Linearfactoren zerlegt, also in der Form:

$$a(x_1,\ x_2) = \Pi \xi_i^{\gamma_i}$$

dargestellt werden, wo die Exponenten γ_i ganze positive oder negative Zahlen, und die Grössen ξ Linearfactoren von der Form $\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2$ bedeuten. Die Summe der Exponenten γ_i ist der Dimension μ von a gleich.

Eine Form $d(x_1, x_2)$ ist in einer anderen $a(x_1, x_2)$ dann und nur dann enthalten, wenn der Quotient $\frac{a(x_1, x_2)}{d(x_1, x_2)}$ eine ganze Form ist. Auf dieser Grundlage kann man nun den grössten gemeinsamen Theiler

$$d(x_1, x_2) = (a_1(x_1, x_2), \ldots, a_n(x_1, x_2))$$

von den n homogenen Formen $a_1, \ldots, a_n$ genau wie früher definiren, und man erkennt, dass er auch hier wieder auf die oben angegebene Weise aus den Linearfactoren von $a_1, \ldots, a_n$ oder auch rational aus $a_1, \ldots, a_n$ gefunden werden kann.

Unter einer *homogenen Wurzelform* verstehe ich eine Function, welche einer Wurzel aus einer homogenen rationalen Form von (x_1, x_2) gleich ist, welche also in der Form:

$$\sqrt[\varrho]{a(x_1, x_2)} = a(x_1, x_2)^{\frac{1}{\varrho}}$$

dargestellt werden kann. Auch sie ist homogen, denn sie multiplicirt sich mit der gebrochenen Potenz $t^{\frac{\mu}{\varrho}}$ von t, wenn (x_1, x_2) durch (tx_1, tx_2) ersetzt wird und μ die Dimension von $a(x_1, x_2)$ ist; deshalb soll dieser rationale Bruch die *Dimension* der Wurzelfunction heissen, sie selbst heisst ganz oder gebrochen, je nachdem a ganz oder gebrochen ist. Selbstverständlich ist jedes Product

$$\prod_i \xi_i^{\delta_i}$$

mit rationalen Exponenten δ_i eine Wurzelform in diesem Sinne. Die Wurzelfunctionen von x allein stimmen überein mit den homogenen Wurzelformen der nullten Dimension.

Sind nun:

$$a_1(x_1, x_2)^{\frac{1}{\varrho_1}}, \quad a_2(x_1, x_2)^{\frac{1}{\varrho_2}}, \quad \ldots, \quad a_n(x_1, x_2)^{\frac{1}{\varrho_n}}$$

n beliebige ganze oder gebrochene Wurzelformen, so wird ihr grösster gemeinsamer Theiler:

$$d(x_1, x_2) = \left(a_1(x_1, x_2)^{\frac{1}{\varrho_1}}, \ldots, a_n(x_1, x_2)^{\frac{1}{\varrho_n}}\right)$$

wieder genau ebenso definirt, wie früher. Der grösste gemeinsame Theiler von mehreren Wurzelformen oder rationalen Formen ist stets und nur dann ganz, wenn es $a_1, \ldots, a_n$ ebenfalls sind. Hieraus folgt, dass in diesem erweiterten Bereiche der grösste gemeinsame Theiler mehrerer rationalen Functionen $(a_1(x), \ldots, a_n(x))$ von x allein niemals ganz sein kann, es sei denn,

dass sich alle diese Functionen auf Constanten reduciren, denn nur in diesem Falle gehen ja $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ für $x = \frac{x_1}{x_2}$ in *ganze* homogene Formen von (x_1, x_2) über.

Ebenso wie hier die homogenen rationalen Formen, will ich an Stelle der algebraischen Functionen von x die homogenen algebraischen Formen von (x_1, x_2) untersuchen; da aber dieses Reich von Grössen bis jetzt noch nicht untersucht worden ist, will ich dieselben zunächst definiren.

Eine homogene algebraische Form von (x_1, x_2) ist eine algebraische Function von (x_1, x_2), welche in Bezug auf diese Variablen homogen ist, d. h. in $t^\mu \eta$ übergeht, wenn x_1, x_2 durch tx_1, tx_2 ersetzt wird. Die Zahl μ heisst die Dimension von η.

Jede algebraische Function von (x_1, x_2) wird durch eine Gleichung:

$$\eta^n + a_1(x_1, x_2)\eta^{n-1} + \cdots + a_n(x_1, x_2) = 0$$

definirt, in der $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beliebige rationale (auch nicht homogene) Functionen von (x_1, x_2) sind. Soll nun η homogen von der μten Dimension sein, so muss die Gleichung, welche aus der obigen durch die Substitution tx_1, tx_2 hervorgeht, für jeden Werth von t durch $t^\mu \eta$ befriedigt werden. Setzt man aber diese Werthe für x_1, x_2, η ein, so geht die Gleichung nach Division mit $t^{n\mu}$ über in die folgende:

$$\eta^n + \frac{a_1(tx_1, tx_2)}{t^\mu}\eta^{n-1} + \frac{a_2(tx_1, tx_2)}{t^{2\mu}}\eta^{n-2} + \cdots + \frac{a_n(tx_1, tx_2)}{t^{n\mu}} = 0,$$

und diese Gleichung muss mit der ersten übereinstimmen. Durch Coefficientenvergleichung ergeben sich hieraus die n Gleichungen:

$$a_i(tx_1, tx_2) = t^{\mu i} a_i(x_1, x_2), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

d. h. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ müssen homogene Formen bezw. der Dimensionen $\mu, 2\mu, \ldots, n\mu$ sein; dass diese Bedingung hinreichend ist, liegt auf der Hand. Es ergiebt sich also der Satz:

Eine algebraische Function von (x_1, x_2), welche durch eine Gleichung:

$$\eta^n + a_1(x_1, x_2)\eta^{n-1} + \cdots + a_n(x_1, x_2) = 0$$

definirt ist, ist dann und nur dann eine homogene algebraische Form, wenn die Coefficienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beliebige homogene Formen bezw. der Dimensionen $\mu, 2\mu, \ldots, n\mu$ sind. Die ganze Zahl μ heisst die Dimension der Form.

Eine Form η heisst *ganz* oder *gebrochen*, je nachdem ihre Gleichungscoefficienten $a_1, \ldots, a_n$ ganz oder gebrochen sind. Eine ganze algebraische Form η besitzt stets eine positive Dimension μ, weil dann alle Coefficienten von positiver Dimension sind. Eine ganze algebraische Form ist dann und nur dann von der nullten Dimension, wenn alle Coefficienten ganz und von der nullten Dimension sind, sich also auf Constanten reduciren; dann sind aber die durch jene Gleichung definirten n conjugirten Grössen ebenfalls Constanten.

Ersetzt man in einer beliebigen Gleichung

$$y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x) = 0,$$

welche y als algebraische Function von x definirt, x durch $\frac{x_1}{x_2}$, so geht sie über in eine andere

$$y^n + a_1(x_1, x_2)y^{n-1} + \cdots + a_n(x_1, x_2) = 0,$$

in welcher die n Coefficienten $a_i(x_1, x_2)$ homogene Formen der nullten Dimension sind; nach unserer Definition ist also jede algebraische Function von x eine homogene algebraische Form der nullten Dimension von (x_1, x_2). Umgekehrt ist aber auch jede homogene algebraische Form η der nullten Dimension eine algebraische Function von $x = \frac{x_1}{x_2}$. Genügt nämlich η einer Gleichung:

$$\eta^n + a_1(x_1, x_2)\eta^{n-1} + \cdots + a_n(x_1, x_2) = 0,$$

in welcher $a_1, \ldots, a_n$ homogen von der nullten Dimension sind, so ist für ein variables t:

$$\eta^n + a_1(tx_1, tx_2)\eta^{n-1} + \cdots + a_n(tx_1, tx_2) = 0,$$

und hieraus folgt für $t = \frac{1}{x_1}$ und $\frac{x_1}{x_2} = x$:

$$\eta^n + a_1(x, 1)\eta^{n-1} + \cdots + a_n(x, 1) = 0,$$

womit die aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

> Es bilden also die algebraischen Functionen von x einen Theilbereich der homogenen algebraischen Formen von (x_1, x_2). Sie sind nämlich identisch mit den homogenen Formen der nullten Dimension.

Hieraus folgt: Eine algebraische Function von x ist als algebraische Form von (x_1, x_2) betrachtet dann und nur dann ganz, wenn sie sich auf

eine Constante reducirt, weil nur dann die Coefficienten der definirenden Gleichung zugleich ganz und von der nullten Dimension sein können. Man erkennt so, dass die Einführung der Formen nothwendig ist, wenn der Begriff der ganzen algebraischen Grössen erhalten bleiben soll.

Ist H eine homogene Form der μten Dimension, so ist der Quotient $\frac{H}{x_2^\mu} = Y$ von der nullten Dimension, also einer algebraischen Function von x gleich. Also gehen alle homogenen algebraischen Formen H aus den algebraischen Functionen Y genau ebenso durch Multiplication mit den ganzzahligen Potenzen x_2^μ hervor, wie die rationalen homogenen Formen $a(x_1, x_2)$ aus den rationalen Functionen $a(x)$, und umgekehrt gehen die Formen H in die entsprechenden algebraischen Functionen Y dadurch über, dass man in ihnen $x_1 = x$, $x_2 = 1$ setzt. Selbstverständlich kann man anstatt des Linearfactors x_2 irgend einen anderen $\xi = \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2$ wählen, die Beziehung zwischen den Formen H und den Functionen Y in ihrer Gesammtheit bleibt genau dieselbe.

Es sei nun η eine beliebige ganze oder gebrochene homogene Form, welche durch die Gleichung:

$$\eta^n + a_1(x_1,\ x_2)\eta^{n-1} + \cdots + a_n(x_1,\ x_2) = 0$$

definirt ist, und ich bezeichne mit

$$\eta_1,\quad \eta_2,\quad \ldots,\quad \eta_n$$

die n conjugirten Wurzeln jener Gleichung. Ich verstehe dann wieder unter einem gemeinsamen Theiler $\delta(x_1, x_2)$ von $\eta_1, \ldots, \eta_n$ jede Function von (x_1, x_2), für welche die n Quotienten $\frac{\eta_i}{\delta(x_1, x_2)}$ algebraisch ganz sind. Dann gelangt man durch die früher angegebenen Ueberlegungen zu dem Begriffe des grössten gemeinsamen Theilers von $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$, welcher die durch die Gleichung:

$$d(x_1,\ x_2) = \left(a_1(x_1,\ x_2),\ a_2(x_1,\ x_2)^{\frac{1}{2}},\ \ldots,\ a_n(x_1,\ x_2)^{\frac{1}{n}}\right)$$

definirte homogene Wurzelform von (x_1, x_2) ist. Dieselbe ist dann und nur dann ganz, wenn alle Coefficienten $a_1, \ldots, a_n$ ganz sind, wenn also η eine *ganze* algebraische Form ist. Eine algebraische Form nullter Dimension, also eine algebraische Function von x allein hat demnach dann und nur dann einen ganzen Theiler, wenn sie eine Constante ist.

Es sei nun wieder y eine beliebige algebraische Function des $n$ten

Grades von x allein, welche durch die irreductible Gleichung:

$$y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x) = 0$$

definirt ist. Ich betrachte jetzt ausser den rationalen Functionen $Y = \varphi(x, y)$ des Gattungsbereiches $\mathfrak{G}(x, y)$ auch alle homogenen algebraischen Formen:

$$H = x_2^\mu Y = x_2^\mu \varphi\left(\frac{x_1}{x_2},\ y\right),$$

wo μ jede positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Durch sie wird dann ebenfalls ein Gattungsbereich oder Körper homogener algebraischer Formen constituirt, welcher durch $\mathfrak{G}(x_1, x_2, y)$ bezeichnet werde, und der den vorher betrachteten Bereich $\mathfrak{G}(x, y)$ als Theilbereich umfasst, denn dieser enthält ja alle und nur die homogenen Formen von $\mathfrak{G}(x_1, x_2, y)$, deren Dimension gleich Null ist. Umgekehrt geht $\mathfrak{G}(x_1, x_2, y)$ in den Theilbereich $\mathfrak{G}(x, y)$ dadurch über, dass man $x_1 = x$, $x_2 = 1$ setzt.

Es seien nun

$$H^{(1)},\quad H^{(2)},\quad \ldots,\quad H^{(n)}$$

n beliebige Grössen des Bereiches $\mathfrak{G}(x_1, x_2, y)$ und $H_1^{(i)}, \ldots, H_n^{(i)}$ allgemein die n zu $H^{(i)}$ conjugirten Formen, d. h. die Formen, in welche $H^{(i)}$ übergeht, wenn man für y der Reihe nach $y_1, \ldots, y_n$ setzt. Bildet man dann das System aus den n Formen

$$(H_k^{(i)})$$

und bezeichnet seine Elementartheiler der Reihe nach durch

$$E_1,\quad E_2,\quad \ldots,\quad E_n,$$

so folgt aus den früher angegebenen Schlüssen auch hier, dass diese n Functionen E_i homogene Wurzelformen von (x_1, x_2) sind, und aus dem auch hier gültigen Fundamentalsatz für die Elementartheiler beliebiger Systeme ergiebt sich weiter, dass die Formen E_i dann und nur dann ganz sind, wenn die Formen $H^{(i)}$ ihrerseits algebraisch ganz sind.

Ein System $(H^{(1)}, \ldots, H^{(n)})$ soll ***kanonisch*** genannt werden, wenn die Wurzelformen

$$d_1(x_1,\ x_2),\quad \ldots,\quad d_n(x_1,\ x_2),$$

welche bezw. die Theiler der Functionen $H^{(i)}$ nebst ihren conjugirten sind mit den Elementartheilern

$$E_1(x_1,\ x_2),\quad \ldots,\quad E_n(x_1,\ x_2)$$

abgesehen von der Anordnung ihrer Linearfactoren übereinstimmen. Ist dies



der Fall, und setzt man:

$$H^{(i)} = d_i(x_1, x_2)Z^{(i)},$$

so enthält die Determinante der ganzen algebraischen Formen $(Z_k^{(i)})$ keinen einzigen Linearfactor, reducirt sich also auf eine Constante. Enthält dagegen die Determinante $|Z_k^{(i)}|$ nur *einen bestimmten* Linearfactor ξ nicht, so soll wie früher das System $(H^{(1)}, \dots, H^{(n)})$ *kanonisch in Bezug auf* ξ genannt werden.

Es sei nun

$$H^{(1)}, \quad \dots, \quad H^{(n)}$$

ein beliebiges System homogener algebraischer Formen des Bereiches $\mathfrak{G}(x_1, x_2, y)$, dessen Determinante

$$|H_k^{(i)}| \gtrless 0$$

ist. Die Dimensionen dieser n Formen seien bezw. $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ und es seien diese Formen ein für alle Male so bezeichnet, dass die Zahlen μ_i der Grösse nach auf einander folgen, dass also allgemein $\mu_i \leqq \mu_{i+1}$ ist. Dann kann genau ebenso wie früher nachgewiesen werden, dass jede algebraische Form H des Bereiches auf eine und nur eine Weise in der Form:

$$(1.) \qquad H = u_1 H^{(1)} + \dots + u_n H^{(n)}$$

dargestellt werden kann, in welcher $u_1, \dots, u_n$ rationale homogene Formen von (x_1, x_2) bedeuten. Denn es bestimmen sich wieder die $u_1, \dots, u_n$ als symmetrische Functionen der Formen $H_k^{(i)}$, also als rationale Functionen von (x_1, x_2), und diese müssen homogen sein, da sonst die homogene Form H nicht durch die Gleichung (1.) dargestellt werden kann. Ist μ die Dimension von H und bezeichnen wie oben $\mu_1, \dots, \mu_n$ diejenigen der Elemente $H^{(1)}, \dots, H^{(n)}$, so muss offenbar u_i eine ganze oder gebrochene homogene Form der $(\mu - \mu_i)$-ten Dimension sein.

Ist nun $(\bar{H}^{(1)}, \dots, \bar{H}^{(n)})$ irgend ein anderes System, so sind seine Elemente durch $(H^{(1)}, \dots, H^{(n)})$ folgendermassen darstellbar:

$$\bar{H}^{(i)} = \Sigma u_{ik} H^{(k)}.$$

Die beiden Systeme sind also durch die Compositionsgleichung:

$$(2.) \qquad (\bar{H}_k^{(i)}) = (H_k^{(i)})(u_{ik})$$

mit einander verbunden. Sind speciell alle Substitutionscoefficienten (u_{ik}) ganz, so heisst das erstere ein Vielfaches des zweiten. Wegen der obigen

Gleichung (2.) ist dann auch das System $(\bar{H}_k^{(i)})$ ein Vielfaches von $(H_k^{(i)})$, das heisst die Elementartheiler $(\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_n)$ sind Vielfache der entsprechenden Elementartheiler $(E_1, \ldots, E_n)$.

§ 8.

Die Fundamentalsysteme und ihre charakteristischen Eigenschaften.

Die im vorigen Abschnitte angegebenen Resultate über die algebraischen Formen führen nun für diese zu dem wichtigen Begriffe des Fundamentalsystemes, welches eine nothwendige Erweiterung des von *Kronecker* für endliche Werthe von x aufgestellten bildet.

> Ich verstehe unter einem Fundamentalsysteme für einen Gattungsbereich $\mathfrak{G}(x_1, x_2, y)$ ein System von n ganzen algebraischen Formen $(H^{(1)}, \ldots, H^{(n)})$, durch welche *jede* ganze Form des Bereiches homogen und linear mit ganzen Formen $u_1, \ldots, u_n$ als Coefficienten dargestellt werden kann.

Da eine Function von (x, y) nur dann eine ganze algebraische Form von (x_1, x_2, y) sein kann, wenn sie eine Constante ist, so kann es kein Fundamentalsystem $(H^{(1)}, \ldots, H^{(n)})$ geben, welches aus Functionen von x und y besteht, vielmehr bedarf man für die Erweiterung des Begriffes eines Fundamentalsystemes nothwendig der Adjunction der algebraischen Formen. Da jedes ganze System $(\bar{H}^{(1)}, \ldots, \bar{H}^{(n)})$ das Fundamentalsystem enthält, so ist dasselbe gemeinsamer Theiler aller ganzen Systeme $(\bar{H}^{(i)})$. Daher sind seine Elementartheiler gemeinsame Theiler der entsprechenden Divisoren aller Systeme, und da das System durch sich selbst auch theilbar ist, so kann man als charakteristische Eigenschaft der Elementartheiler eines Fundamentalsystemes, *falls ein solches existirt,* den folgenden Satz aussprechen:

> Die Elementartheiler eines Fundamentalsystemes sind die grössten gemeinsamen Divisoren der entsprechenden Elementartheiler aller ganzen Systeme des Bereiches $\mathfrak{G}(x_1, x_2, y)$. Da ferner die Elementartheiler eines Systemes dann und nur dann ganz sind, wenn seine Elemente algebraisch ganz sind, so brauchen die letzteren nicht noch ausdrücklich als ganz vorausgesetzt zu werden, wenn $E_1, \ldots, E_n$ ganz sind.

Ich will nun zunächst nachweisen, dass ein Fundamentalsystem dieser Art stets existirt. Es sei $(H^{(1)}, \ldots, H^{(n)})$ irgend ein System von ganzen

homogenen Formen, dessen Determinante $|H_k^{(i)}| \gtrless 0$ ist. Ist dasselbe kein Fundamentalsystem, so muss eine ganze Form H existiren, welche durch jenes System nur mit gebrochenen Coefficienten darstellbar ist. Bringt man jene Coefficienten auf gemeinsamen Nenner, so erscheint H in der Form:

$$H = \frac{u_1 H^{(1)} + \cdots + u_n H^{(n)}}{u},$$

wo $u, u_1, \ldots, u_n$ homogen und ganz sind, und kein Linearfactor von u in allen Formen $u_1, \ldots, u_n$ zugleich enthalten ist. Ist nun ξ_1 irgend ein Linearfactor von u, ist also $u = \xi_1 \bar{u}$, so ist

$$\bar{u}.H = \frac{u_1 H^{(1)} + \cdots + u_n H^{(n)}}{\xi_1}$$

a fortiori algebraisch ganz, und ξ_1 ist nicht in allen Coefficienten $u_1, \ldots, u_n$ als Factor enthalten. Der Einfachheit wegen kann und will ich $\xi_1 = x_1$ annehmen; ist dies nämlich nicht der Fall und ist ξ_2 irgend ein von ξ_1 verschiedener Linearfactor, so kann man (x_1, x_2) linear durch (ξ_1, ξ_2) ausdrücken und damit auch $u_1, \ldots, u_n$ als homogene Formen derselben Dimension von (ξ_1, ξ_2) darstellen; somit ist diese Annahme auf die oben gemachte specielle zurückgeführt. Ist nun

$$\frac{u_1 H^{(1)} + \cdots + u_n H^{(n)}}{x_1}$$

algebraisch ganz, ohne dass x_1 in allen Coefficienten enthalten ist, so bleibt diese Eigenschaft des Quotienten erhalten, wenn man in den homogenen Formen $u_1, \ldots, u_n$ alle mit x_1 multiplicirten Terme fortlässt, weil diese für sich durch x_1 theilbar sind. Der übrig bleibende Theil nimmt dann die Form an:

$$\frac{c_1 x_2^{\nu_1} H^{(1)} + c_2 x_2^{\nu_2} H^{(2)} + \cdots + c_n x_2^{\nu_n} H^{(n)}}{x_1},$$

wo $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nicht sämmtlich verschwindende Constanten und $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ ganzzahlige Exponenten sind, welche die Dimensionen $\mu_1, \ldots, \mu_n$ von $H^{(1)}, \ldots, H^{(n)}$ zu der Dimension μ des ganzen Zählers ergänzen; und da die Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_n$ eine zunehmende Reihe bildeten, so ist allgemein $\nu_{i+1} \leqq \nu_i$.

Ist dann c_r der letzte der n Coefficienten, welcher von Null verschieden ist, und der also von vornherein gleich Eins vorausgesetzt werden kann, so folgt aus unserer Annahme, dass eine ganze algebraische Form:

$$\frac{c_1 x_2^{\nu_1} H^{(1)} + \cdots + x_2^{\nu_r} H^{(r)}}{x_1} = x_2^{\nu_r} \cdot \frac{c_1 x_2^{\nu_1'} H^{(1)} + \cdots + c_{r-1} x_2^{\nu_{r-1}'} H^{(r-1)} + H^{(r)}}{x_1}$$

algebraisch ganz ist, und dasselbe gilt also auch für die Form:

$$\bar{H}^{(r)} = \frac{c_1 x_2^{\nu'_1} H^{(1)} + \cdots + H^{(r)}}{x_1},$$

welche den Coefficienten von $x_2^{\nu_r}$ bildet, und ihre Dimension ist gleich $\mu_r - 1$, wenn μ_r die Dimension von $H^{(r)}$ ist. Ersetzt man nun in $(H^{(1)}, \ldots, H^{(r)}, \ldots, H^{(n)})$ das Element $H^{(r)}$ durch dieses neue $\bar{H}^{(r)}$, so erhält man ein neues System von n algebraisch ganzen Formen, dessen Determinante auch von Null verschieden ist. Während aber die Gesammtdimension des ersten Systemes gleich $(\mu_1 + \cdots + \mu_r + \cdots + \mu_n)$ ist, ist die des neuen $(\mu_1 + \cdots + \mu_r - 1 + \cdots + \mu_n)$, d. h. um Eins geringer, und da man einerseits diese Reduction so lange fortsetzen kann, als das System noch kein Fundamentalsystem ist, und da andererseits die Gesammtdimension eines Systemes ganzer Formen nie negativ werden kann, so ist die Existenz eines solchen Fundamentalsystemes dargethan.

Man kann nun die charakteristische Eigenschaft des Fundamentalsystemes für einen Gattungsbereich folgendermassen aussprechen:

> Ein System $(H^{(1)}, \ldots, H^{(n)})$ eines Gattungsbereiches $\mathfrak{G}(y)$ ist dann und nur dann ein Fundamentalsystem für denselben, wenn seine n Elementartheiler $E_1, \ldots, E_n$ ganze Wurzelfunctionen mit lauter echt gebrochenen Exponenten, wenn sie also ganze reducirte Wurzelformen sind.

Dass diese Bedingung hinreichend ist, um ein System als Fundamentalsystem zu charakterisiren wird genau ebenso bewiesen, wie im § 4 der entsprechende Satz für die *Kronecker*schen Fundamentalsysteme. Um aber noch zu zeigen, dass jene Bedingung eine nothwendige ist, genügt es darzuthun, dass in jedem Bereiche $\mathfrak{G}(x_1, x_2, y)$ ein System von n Formen existirt, dessen Elementartheiler lauter positive echt gebrochene Exponenten eines beliebig gegebenen Linearfactors ξ_1 enthalten; denn da, wie oben bewiesen wurde, ein Fundamentalsystem stets existiren muss, und da seine Elementartheiler in den entsprechenden jenes speciellen Systemes enthalten sind, so müssen auch diese lauter positive echt gebrochene Potenzen von ξ_1 enthalten, welche gleich oder kleiner sind als die entsprechenden des vorigen Systemes, und da ferner ξ_1 als ein ganz beliebiger Linearfactor angenommen war, so ist der Beweis jenes Satzes vollständig erbracht. Da man nun aus einem kanonischen Fundamentalsysteme in Bezug auf ξ_1 durch Division seiner Elemente durch die grössten in ihnen enthaltenen ganzen

Potenzen von ξ_1 ein Fundamentalsystem der verlangten Art herleiten kann, so ist auch hier der vorige Satz auf den allgemeineren reducirt:

Jedes System $(H^{(1)}, \ldots, H^{(n)})$ ist für einen beliebigen Linearfactor ξ_1 einem kanonischen Systeme äquivalent.

Bei dem Beweise dieses Satzes kann man wiederum an Stelle des Linearfactors ξ_1 etwa x_1 nehmen, da man ja durch die schon einmal erwähnte Transformation (x_1, x_2) durch ξ_1 und ξ_2 ersetzen kann, wo ξ_2 irgend einen von ξ_1 verschiedenen Linearfactor bedeutet. Dass aber $(H^{(1)}, \ldots, H^{(n)})$ in Bezug auf x_1 einem kanonischen Systeme äquivalent ist, ergiebt sich folgendermassen: Ist allgemein μ_i die Dimension von $H^{(i)}$, so ist:

$$H^{(i)} = x_2^{\mu_i} Y^{(i)},$$

wo $Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)}$ lauter rationale Functionen von x und y sind, und da x_2 von x_1 verschieden ist, so folgt, dass das System $(H^{(1)}, \ldots, H^{(n)})$ in Bezug auf x_1 dem Systeme $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ des Bereiches $\mathfrak{G}(x_1, x_2, y)$ äquivalent ist. Jedes solches System ist aber in Bezug auf $x = \frac{x_1}{x_2}$, also auch in Bezug auf x_1 selbst einem kanonischen äquivalent, wie oben bewiesen wurde, und daher folgt, dass auch $(H^{(1)}, \ldots, H^{(n)})$ demselben kanonischen Systeme äquivalent ist.

Auch hier gehört also zu jedem Systeme $(H^{(1)}, \ldots, H^{(n)})$ von homogenen Formen ein Diagonalsystem $(d_1(x_1, x_2), \ldots, d_n(x_1, x_2)$ von homogenen Wurzelformen, deren einzelne Bestandtheile sich aus den Elementartheilern des quadratischen Systemes $(H_k^{(i)})$ unmittelbar ergeben. Sind nämlich für einen beliebigen Linearfactor ξ,

$$\xi^{\delta_1}, \quad \xi^{\delta_2}, \quad \ldots, \quad \xi^{\delta_n}$$

die gebrochenen Potenzen, welche bezw. im ersten, zweiten, ..., $n$ten Elementartheiler von $(H_k^{(i)})$ enthalten sind, so sind dieselben Potenzen auch abgesehen von ihrer Reihenfolge diejenigen, welche in $d_1, \ldots, d_n$ vorkommen; die Reihenfolge, in welcher jene Potenzen in den Formen $d_1, \ldots, d_n$ auftreten, ist aber ganz willkürlich, weil das Diagonalsystem $d_i(x_1, x_2)$ bei jeder Vertauschung jener Factoren dieselben Elementartheiler behält, also im Sinne der Aequivalenz nicht geändert wird. Speciell ist jedes System $(H_k^{(1)}, \ldots, H_k^{(n)})$ demjenigen Diagonalsysteme $(e_1(x_1, x_2), \ldots, e_n(x_1, x_2))$ äquivalent, welches aus seinen Elementartheilern gebildet wird; man erhält dasselbe, wenn man für jeden Linearfactor ξ die Potenzen $\xi^{\delta_1}, \ldots, \xi^{\delta_n}$ ihrer Grösse nach in aufsteigender Reihenfolge anordnet.

Man beweist nun genau wie oben im § 6 für beliebige Systeme homogener Formen den Satz, welchen ich im Titel dieser Abhandlung als einen Fundamentalsatz in der Theorie der algebraischen Functionen bezeichnet habe:

> Ist $(H^{(1)}, \ldots, H^{(n)})$ irgend ein System von n Formen des Bereiches $\mathfrak{G}(x_1, x_2, y)$ mit nicht verschwindender Determinante und $(d_1(x_1, x_2), \ldots, d_n(x_1, x_2))$ das System der zugehörigen Wurzelformen; ist ferner $(\bar{H}^{(1)}, \ldots, \bar{H}^{(n)})$ irgend ein anderes System desselben Bereiches, so gehört zu diesem ein System $(\bar{d}_1(x_1, x_2), \ldots, \bar{d}_n(x_1, x_2))$ von Wurzelformen, welche sich von den entsprechenden des vorigen Systemes nur um *rationale* homogene Formen von (x_1, x_2) unterscheiden.

Der Beweis dieses Satzes wird wörtlich ebenso wie der des specielleren in § 6 geführt, denn er beruht ja allein auf den auch hier gültigen Sätzen, dass einmal jedes System in Bezug auf einen beliebigen Linearfactor ξ einem kanonischen Systeme äquivalent ist, ferner, dass ein Fundamentalsystem für die ganzen Formen des Bereiches existirt, und dass endlich zwei Fundamentalsysteme äquivalent sind, also dieselben Elementartheiler haben. Wählt man speciell für $(d_1, \ldots, d_n)$ die Elementartheiler von $(H_k^{(i)})$, so kann man den folgenden Satz aussprechen:

> Ist $(H_k^{(i)})$ ein beliebiges System algebraischer Formen mit nicht verschwindender Determinante und sind $(e_1(x_1, x_2), \ldots, e_n(x_1, x_2))$ seine Elementartheiler, so gehört zu dem Fundamentalsysteme des Bereiches das System von Wurzelformen, welches durch die kleinsten Reste jener Elementartheiler constituirt wird.

Um einem Missverständnisse vorzubeugen, möchte ich hervorheben, dass jene reducirten Elementartheiler des ersten Systemes keineswegs die Elementartheiler des Fundamentalsystemes sind; diese gehen vielmehr aus jenen erst dadurch hervor, dass man die in ihnen enthaltenen Potenzen der einzelnen Linearfactoren nach der Grösse ihrer echt gebrochenen Exponenten ordnet. So besteht auch keineswegs der Satz, dass die *Elementartheiler* zweier Systeme sich nur um rationale Formen von (x_1, x_2) unterscheiden, denn diese sind zwar beide Diagonalsysteme, welche zu jenen Systemen gehören, aber sie sind im allgemeinen nicht entsprechende Diagonalsysteme, da in dem ersten die Exponenten der Linearfactoren ihrer

Grösse nach auf einander folgen, während beim zweiten die kleinsten Reste jener Exponenten ihrer Grösse nach geordnet sind, es unterscheiden sich also hier zwei entsprechende Exponenten keineswegs stets um ganze Zahlen.

Mit Hülfe dieses Fundamentalsatzes ergiebt sich nun die folgende Vorschrift, um zu einem beliebigen Systeme von nicht verschwindender Determinante die einem Fundamentalsysteme zugehörigen Wurzelformen ohne Kenntniss der Elemente jenes Systemes anzugeben:

Ist $(Y^{(1)}, \dots, Y^{(n)})$ ein beliebiges System von nicht verschwindender Determinante und sind $(d_1(x_1, x_2), \dots, d_n(x_1, x_2))$ die zugehörigen Wurzelformen, so sind

$$R(d_1(x_1, x_2)), \quad \dots, \quad R(d_n(x_1, x_2))$$

die Wurzelformen des Fundamentalsystemes.

Am einfachsten kann man die Wurzelformen eines Systemes

$$\begin{pmatrix} 1 & \eta_1 & \eta_1^2 & \dots & \eta_1^{n-1} \\ 1 & \eta_2 & \eta_2^2 & \dots & \eta_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \eta_n & \eta_n^2 & \dots & \eta_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

berechnen, wenn η irgend eine Function des Bereiches $\mathfrak{G}(x_1, x_2, y)$ bedeutet, und aus diesen erhält man also die Wurzelformen des Fundamentalsystemes einfach dadurch, dass man ihre grössten rationalen Bestandtheile einfach fortlässt. Ich werde in einer folgenden Arbeit jene Bestimmung in einigen sehr allgemeinen Fällen durchführen. Sie giebt ein Verfahren, um ganz allgemein das Geschlecht aller Klassen algebraischer Functionen in expliciter Weise zu bestimmen, welche auf einer beliebigen drei-, vier-, oder fünfblättrigen *Riemann*schen Fläche eindeutig sind, welche also durch eine Gleichung

$$y^3+a_1y^2+a_2y+a_3 = 0,$$
$$y^4+b_1y^3+b_2y^2+b_3y+b_4 = 0,$$
$$y^5+c_1y^4+c_2y^3+c_3y^2+c_4y+c_5 = 0$$

definirt werden, in denen die Coefficienten a, b, c völlig beliebige rationale Functionen eines beliebig hohen Grades von x sind.

§ 9.

Die Discriminanten der algebraischen Systeme und die Discriminante der Gattung.

Ist $(H^{(1)}, \dots, H^{(n)})$ ein beliebiges System von n Formen des Gattungsbereiches $\mathfrak{G}(x_1, x_2, y)$, so ist das Quadrat der Determinante $(H_k^{(i)})$ also,

$$|H_k^{(i)}|^2 = D(x_1, x_2) = D(H^{(1)}, \dots, H^{(n)})$$

eine rationale homogene Form von (x_1, x_2), welche die ***Discriminante*** jenes Systemes genannt wird. Dieselbe ist dann und nur dann von Null verschieden, wenn $(H^{(1)}, \dots, H^{(n)})$ ein System von unabhängigen Formen bedeutet. Sind $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ die Dimensionen der Elemente $H^{(i)}$, so ist das Quadrat jener Determinante, oder jene Discriminante offenbar von der Dimension

$$\mu = 2(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n).$$

Sind also speciell alle Elemente $H^{(i)} = Y^{(i)}$ von der nullten Dimension, also rationale Functionen von x und y, so ist auch $D(x_1, x_2)$ eine rationale Function von x, welche ebenfalls die Discriminante von $(Y^{(1)}, \dots, Y^{(n)})$ genannt wird.

Ist z. B. η eine beliebige algebraische Form des Bereiches $\mathfrak{G}(x_1, x_2, y)$, welche durch eine irreductible Gleichung:

$$\eta^n+a_1\eta^{n-1}+\cdots+a_n = 0$$

definirt ist, so ist die Discriminante

$$D(1, \eta, \eta^2, \dots, \eta^{n-1}) = |\eta_k^i|^2$$

nichts anderes als die Discriminante der Gleichung für η, welche leicht aus den Coefficienten derselben bestimmt werden kann.

Es sei nun speciell $(\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(n)})$ ein Fundamentalsystem für $\mathfrak{G}(x_1, x_2, y)$, so nenne ich seine Discriminante:

$$D(\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(n)}) = |\eta_k^{(i)}|^2$$

auch die ***Discriminante der Gattung*** $\mathfrak{G}(x_1, x_2, y)$ ***oder auch der Gattung*** $\mathfrak{G}(x, y)$. Ihre Dimension ergiebt leicht das Geschlecht der durch $\mathfrak{G}(x, y)$ bestimmten Klasse algebraischer Functionen, ihre Linearfactoren ξ bestimmen die Verzweigungspunkte der zugehörigen *Riemann*schen Fläche, und ebenso kann man aus ihr die Ordnung der zugehörigen Verzweigungspunkte unmittelbar erkennen, wie in einer späteren Arbeit dargelegt werden wird. Es ist deshalb eine sehr wichtige und meines Wissens noch niemals gelöste Aufgabe, aus einem beliebigen Systeme $(Y^{(1)}, \dots, Y^{(n)})$ von algebraischen Functionen von x mit nicht verschwindender Discriminante, etwa aus dem Systeme $(1, y, y^2, \dots, y^{n-1})$ die Gattungsdiscriminante zu berechnen.

Der soeben gefundene Fundamentalsatz beantwortet diese Frage in einfachster Weise. Man erhält ohne weiteres den Satz:

Sind $e_1, e_2, \ldots, e_n$ die Elementartheiler eines beliebigen Systemes $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$, ist also

$$D(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)}) = e_1^2 e_2^2 \ldots e_n^2 = \prod_1^n e_i^2,$$

so ist die Gattungsdiscriminante $D(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ durch jede der folgenden Gleichungen bestimmt:

$$D(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)}) = \left(\frac{e_1}{[e_1]} \cdot \frac{e_2}{[e_2]} \cdots \frac{e_n}{[e_n]}\right)^2 = (\Pi R(e_i))^2$$
$$= \frac{D(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})}{([e_1][e_2]\ldots[e_n])^2}.$$

In der schon oben erwähnten folgenden Arbeit soll die Gattungsdiscriminante für die allgemeine Gleichung des dritten, des vierten und des fünften Grades bestimmt werden. Hier möge zum Abschluss und zur Erläuterung dieser Untersuchungen noch das einfache Beispiel der reinen Gleichung und der Bestimmung ihrer Gattungsdiscriminante kurz durchgeführt werden. Es sei also

$$y^n = a(x)$$

eine beliebige reine Gleichung für y, also $a(x)$ irgend eine rationale ganze oder gebrochene Function. Ersetzt man hier x durch $\frac{x_1}{x_2}$, so geht $a(x)$ in eine homogene Form der nullten Dimension von (x_1, x_2) über, welche durch $a(x_1, x_2)$ bezeichnet werde; es ist also:

$$y^n = a(x_1, x_2).$$

Dann ergiebt sich genau wie früher, dass das System

$$1, \; y, \; y^2, \; \ldots, \; y^{n-1}$$

ein kanonisches System für jeden Linearfactor ξ ist, und seine Discriminante $D(1, y, \ldots, y^{n-1})$ hat den Werth:

$$D(1, y, \ldots, y^{n-1}) = y^{2(1+2+3+\cdots+n-1)} = a^{2\frac{1}{n}(1+2+\cdots+n-1)} = a^{n-1};$$

ferner folgt hieraus, dass das System der Formen

$$1, \; \frac{y}{\left[a^{\frac{1}{n}}\right]}, \; \ldots, \; \frac{y^{n-1}}{\left[a^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

ein Fundamentalsystem für die ganzen homogenen Formen unseres Bereiches

ist und zwar jetzt auch für den Linearfactor x_2, d. h. auch für unendlich grosse Werthe von x.

Hieraus ergiebt sich also für die Gattungsdiscriminante $D(x_1, x_2)$ dieses Bereiches der Werth:

$$D(x_1 x_2) = \frac{D(1, y, \ldots, y^{n-1})}{\Pi\left[a^{\frac{i}{n}}\right]} = \left(\Pi \frac{a^{\frac{i}{n}}}{\left[a^{\frac{i}{n}}\right]}\right)^2 = (\Pi R(a^{\frac{i}{n}}))^2.$$

Man kann nun leicht angeben, wie oft irgend ein homogener Linearfactor ξ in D enthalten ist. Es sei ξ ein r-facher Linearfactor von $a(x_1, x_2)$, wobei r eine positive oder negative ganze Zahl, oder auch gleich Null sein kann. Dann ist er in $a^{\frac{i}{n}}$ und $\left[a^{\frac{i}{n}}\right]$ bezw. $i\frac{r}{n}$ und $\left[i\frac{r}{n}\right]$ mithin in $R(a^{\frac{i}{n}})$ genau $R\left(i\cdot\frac{r}{n}\right)$ Male enthalten, wo $R(\alpha)$ wieder allgemein den kleinsten positiven Rest des Bruches α bezeichnet. Also ist ξ in $D(x_1, x_2)$ genau ϱ Male enthalten, wenn

$$\varrho = 2\sum_{i=1}^{n-1} R\left(\frac{ir}{n}\right)$$

ist. Ist nun in der reducirten Form:

$$\frac{r}{n} = \frac{r'}{n'}, \quad \text{ist also} \quad r = tr', \quad n = tn',$$

so ergiebt sich für ϱ der Werth:

$$\varrho = 2t\sum_{i=1}^{n'-1} R\left(\frac{ir'}{n'}\right)$$

und da die kleinsten Reste von $\left(\frac{ir'}{n'}\right)$ mit den Brüchen $\frac{i}{n'}$, abgesehen von der Reihenfolge übereinstimmen, so folgt

$$\varrho = t(n'-1) = n-t = n-(n, r),$$

wo (n, r) den grössten gemeinsamen Theiler von n und r bedeutet; die Zahl ϱ ist demnach stets kleiner als n, und dann und nur dann gleich Null, wenn r ein Vielfaches von n, die Null mit eingeschlossen ist.

Ist also:

$$y^n = \prod_{i=1}^{h} \xi_i^{r_i}$$

irgend eine in homogener Form geschriebene reine Gleichung $n$ten Grades,

so ist ihre Gattungsdiscrimante

$$D(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^{h} \xi_i^{n-(n,r)}.$$

Es sei z. B. die vorgelegte reine Gleichung:

$$y^{12} = \frac{(x-a)^3(x-b)^8}{(x-c)^7(x-d)^{18}(x-e)^{13}}$$

$$= \frac{(x_1-ax_2)^3(x_1-bx_2)^8 x_2^{26}}{(x_1-cx_2)^7(x_1-dx_2)^{18}(x_1-ex_2)^{13}},$$

dann ist die Gattungsdiscriminante durch die Gleichung

$$D(x_1 x_2) = (x_1-ax_2)^9(x_1-bx_2)^8(x_1-cx_2)^{11}(x_1-dx_2)^6 x_2^{10}$$

bestimmt.

Berlin, den 5. Juli 1895.

Sur la congruence $(r^{p-1}-1):p \equiv q_r \pmod{p}$.

(Par M. *D. Mirimanoff* à Genève.)

Soient p un nombre premier, r un nombre entier quelconque premier à p. Posons

$$\frac{r^{p-1}-1}{p} \equiv q_r \pmod{p}.$$

Eisenstein (Ber. der Berl. Akad., 1850, p. 41), ***M. Sylvester*** (Comptes rendus, t. 52, p. 161), ***M. Stern*** (ce Journal, t. 100) ont étudié les propriétés de la fonction numérique q_r. M. ***Sylvester*** a donné une expression générale de q_r au moyen d'une série de fractions très simples.

Cette expression doit être modifiée pour pouvoir s'appliquer à tous les cas; elle peut de plus être considérablement simplifiée dans le cas où r n'est pas une racine primitive pour le module p. Je partirai, pour le prouver, des relations suivantes:

$$\text{(a.)} \qquad q_{r_1 r_2} \equiv q_{r_1} + q_{r_2}; \quad q_{\frac{r_1}{r_2}} \equiv q_{r_1} - q_{r_2},$$

$$\text{(b.)} \qquad q_{p \pm r} \equiv q_r \mp \frac{1}{r} \pmod{p}.$$

Supposons, pour plus de simplicité, que r soit un nombre premier inférieur à p. Soit a_0 le plus petit nombre positif tel que $a_0 p + 1$ soit divisible par r. Je pose $a_0 p + 1 = r^{e_0} b_1$, b_1 étant premier à r.

Soit en général a_i le plus petit nombre positif tel que $a_i p + b_i \equiv 0 \pmod{r}$. Je forme le tableau

$$\text{(1.)} \qquad \begin{cases} a_0 p + 1 &= r^{e_0} b_1, \\ a_1 p + b_1 &= r^{e_1} b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_i p + b_i &= r^{e_i} b_{i+1}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

$b_1, b_2, \ldots, b_i$ étant premiers à p.

Cette suite est périodique et on obtiendra finalement l'égalité

$$a_{n-1}p+b_{n-1} = r^{e_{n-1}},$$

d'où $b_n = 1$, $b_{n+1} = b_1$ etc.

Or, en vertu de (a.) et (b.), on a

$$q_{a_i p+b_i} \equiv q_{b_i} - \frac{a_i}{b_i} \quad \text{et} \quad q_{r^{e_i} b_{i+1}} \equiv e_i q_r + q_{b_{i+1}};$$

par conséquent

$$q_{b_i} - \frac{a_i}{b_i} \equiv e_i q_r + q_{b_{i+1}}. \qquad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

Il vient en ajoutant ces n congruences:

$$(2.) \qquad -\Sigma \frac{a_i}{b_i} \equiv q_r \Sigma e_i. \qquad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

Soit maintenant ω l'exposant auquel appartient r (mod.p); je pose $\frac{p-1}{\omega} = e$. Je dis que la somme Σe_i est égale à ω et que la suite $1, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ est composée des résidus des puissances e premiers à r.

En effet, tout b_i est de la forme $\frac{1}{r^k}$ (mod.p) et réciproquement tout nombre de cette forme fait partie de la suite b_i, s'il est premier à r.

Soit aussi

$$\frac{r^\omega - 1}{p} = u_0 + u_1 r^{m_1} + u_2 r^{m_2} + \dots + u_k r^{m_k},$$

les coefficients u_i étant positifs et inférieurs à r et $m_1 < m_2 \dots < m_k$. Les différences $\omega - m_k$, $m_k - m_{k-1}$, ... sont égales à e_{n-1}, e_{n-2}, ... et les coefficients u_k, u_{k-1}, ... à a_{n-1}, a_{n-2} ..., ce qui prouve que la somme Σe_i relative à une période est égale à ω. Je ferai remarquer aussi que le tableau (1.) donne une représentation du quotient $\frac{r^\omega - 1}{p}$ dans le système à r chiffres.

L'égalité (2.) devient

$$(3.) \qquad q_r \equiv e \Sigma \frac{a_i}{b_i}. \qquad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

Si $r = 2$, les a_i sont égaux à 1, et l'on a

$$q_2 \equiv e \Sigma \frac{1}{b_i},$$

la somme étant étendue à tous les résidus impairs des puissances e. Soit, par exemple, $p = 89$, $\omega = 11$, $e = 8$. Il y a 4 nombres impairs résidus des puissances 8, ce sont les nombres 1, 39, 45, 67.

$$q_2 \equiv 8(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{39} + \tfrac{1}{45} + \tfrac{1}{67}) \equiv 8.23 \equiv 22.$$

Le tableau (1.) devient

$$\begin{aligned} 89+1 &= 2.45, \\ 89+45 &= 2.67, \\ 89+67 &= 2^2.39, \\ 89+39 &= 2^7. \end{aligned}$$

Le tableau (1.) donne en même temps l'exposant ω auquel appartient r et tous les résidus des puissances e premiers à r.

Dans le cas où r est une racine primitive pour le module p, la formule (3.) devient

$$(4.) \qquad q_r \equiv \Sigma \frac{a_i}{b_i},$$

b_i parcourant la série des nombres positifs inférieurs à p et premiers à r, et a_i étant le plus petit nombre positif tel que $a_i p + b_i \equiv 0 \pmod{r}$. On pourrait d'ailleurs introduire dans la somme (4.) les b_i divisibles par r, puisque les a_i correspondants sont nuls (Comptes rendus t. 52). La formule (4.) est générale et la méthode précédente suffirait pour le prouver. On peut d'ailleurs l'établir directement de la manière suivante.

Je considère la somme

$$U = \Sigma q_\beta(\beta^{2k}-(r\beta)^{2k}) = \Sigma q_\beta \beta^{2k} - \Sigma q_\beta (r\beta)^{2k} \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, p-1)$$

k étant un entier quelconque.

Les nombres β se divisent en r groupes; je range dans un même groupe i tous les β qui sont congrus à $i \pmod{r}$, je les désignerai par β_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, r-1)$.

Les $r\beta$ congrus à $\beta_i \pmod{p}$ sont de la forme $\beta_i + \alpha_i p$, α_i étant le plus petit reste positif de $\frac{-i}{p} \pmod{r}$.

Or $q_{\frac{\beta_i+\alpha_i p}{r}}$ est congru à $q_{\beta_i} - \frac{\alpha_i}{\beta_i} - q_r \pmod{p}$. Le coefficient de β_i^{2k} dans U est donc congru à $\frac{\alpha_i}{\beta_i} + q_r$ et l'on a

$$(5.) \qquad U \equiv \Sigma \frac{\alpha_i \beta_i^{2k}}{\beta_i} + \Sigma q_r \beta_i^{2k},$$

la somme étant étendue à tous les β. Soit maintenant $2k = p-1$. Le premier membre s'annulle $(\text{mod.} p)$ et il vient

$$(6.) \qquad q_r \equiv \Sigma \frac{\alpha_i}{\beta_i},$$

β_i parcourant la série des nombres 1, 2, ..., $p-1$ et α_i étant le plus petit nombre positif tel que $\alpha_i p + \beta_i \equiv 0$ (mod. r). C'est donc la formule (4.).

On peut exprimer q_r en fonction des β_i qui ne dépassent pas $\frac{p-1}{2} = \nu$.

Il suffirait pour cela de considérer la somme

$$V = \Sigma q_\beta(\beta^{2k} - (r\beta)^{2k}) \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, \nu)$$

et on arriverait à la formule

$$\frac{q_r}{2} \equiv \Sigma \frac{\alpha_i}{\beta_i} - \Sigma \frac{r-\alpha_i}{\beta_i}; \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, \nu)$$

la première de ces sommes doit être étendue aux β tels que $\alpha_i \leqq \frac{r-1}{2}$ et la seconde aux β tels que $\alpha_i > \frac{r-1}{2}$.

On peut simplifier la formule (6.). Posons $\beta_i = p - \partial_i$ et soit p' le plus petit reste positif de $\frac{1}{p}$ (mod. r). Il viendra $\alpha_i \equiv p'\partial_i - 1$ (mod. r).

En augmentant d'une unité les numérateurs de toutes les fractions de (6.), on arrive à la formule

$$q_r \equiv \Sigma \frac{p'\partial_i}{p-\partial_i}.$$

Les dénominateurs parcourant la suite des nombres $p-1, p-2, \ldots, 2, 1$ on voit que dans le cas de $p' = 1$, les numérateurs correspondants parcourent le cycle 1, 2, ..., r et dans le cas de $p' > 1$ le cycle $p', 2p', \ldots, rp' \equiv r$ (mod. r) ou le cycle commençant par p' et relatif à la substitution $(1.2 \ldots r)^{p'}$. On voit à présent comment doit être modifiée la loi de M. *Sylvester*. Dans le cas de $r = 5$ et $\frac{1}{p} \equiv 3$ (mod. 5), l'expression générale de q_r n'est pas

$$\frac{3}{p-1} + \frac{4}{p-2} + \frac{5}{p-3} + \frac{1}{p-4} + \frac{2}{p-5} \cdots,$$

mais bien

$$\frac{3}{p-1} + \frac{1}{p-1} + \frac{4}{p-3} + \frac{2}{p-4} + \frac{5}{p-5} \cdots,$$

les numérateurs formant la progression arithmétique kp' (mod. r).

2.

Voici une application de quelques-uns des résultats obtenus.

Soient B_k le $k^{\text{ième}}$ nombre de *Bernoulli*, p un nombre premier et $\nu = \frac{p-1}{2}$.

Les nombres $B_k, B_{k+\nu}, \ldots, B_{k+n\nu}$ sont liés par la relation

$$(7.) \qquad \Sigma(-1)^{i+i\nu}\binom{n}{i}\frac{B_{k+i\nu}}{2(k+i\nu)} \equiv 0 \pmod{p^n}. \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

Dans cette formule*) le nombre k doit être $\geqq \frac{1}{2}(n+1)$ et il n'est pas divisible par ν.

En particulier

$$(8.) \qquad \frac{B_k}{2k} - (-1)^\nu \frac{B_{k+\nu}}{2(k+\nu)} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Si $B_k \equiv 0 \pmod{p}$, tous les $B_{k+i\nu}$ sont divisibles par p; posons $B_{k+i\nu} = p.b_{k+i\nu}$. Les $b_{k+a\nu}$ et $b_{k+(a+1)\nu}$ sont liés par une relation analogue à (8.) avec cette différence que le second membre n'est plus 0, mais un nombre indépendant de α.

On a, en effet

$$(9.) \quad \begin{cases} (-1)^{k-1}\left(\frac{b_k}{2k} - (-1)^\nu \frac{b_{k+\nu}}{2(k+\nu)}\right) \equiv \frac{2^{2k-1}}{2^{2k}-1}\Sigma q_h h^{2k-1} \\ \qquad \equiv \Sigma(q_h h^{2k})^2 + \Sigma q_h h^{2k-1} \pmod{p}. \\ \qquad (h = 1, 2, \ldots, \nu) \end{cases}$$

La première de ces relations résulte de la formule

$$\Pi_{2k-1}\psi(\tfrac{1}{2}) = (-1)^k \frac{B_k}{2k} \cdot \frac{2^{2k}-1}{2^{2k-1}}$$

$\psi(x)$ étant la fonction de *Bernoulli*

$$\frac{x^{2k}}{\Pi_{2k}} - \frac{x^{2k-1}}{2\Pi_{2k-1}} + \Sigma(-1)^{i-1}\frac{B_i x^{2k-2i}}{\Pi_{2k-2i}\Pi_{2i}}. \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1)$$

Cette formule donne

$$\Pi_{2k-1}\psi\left(\frac{1+p^2}{2}\right) \equiv (-1)^k \frac{B_k}{2k} \cdot \frac{2^{2k}-1}{2^{2k-1}} \pmod{p^2}$$

et

$$\frac{(-1)^k B_k}{2k} \cdot \frac{2^{2k}-1}{2^{2k-1}} \equiv \Sigma h^{2k-1} \pmod{p^2}. \qquad (h = 1, 2, \ldots, \nu)$$

De là découle immédiatement la première des relations (9.).

---

*) Ce Journal, t. 41, p. 371.

Quant à la seconde, j'observe qu'on a

$$\Sigma h - 2\Sigma h^p + \Sigma h^{2p-1} \equiv p\frac{q_x x(q_x x+1)}{2} \pmod{p^2}, \quad (h=1,2,\dots,x-1)$$

x étant un nombre entier quelconque. Je remplace les trois sommes par leurs expressions en fonction de x et je fais successivement $x = 1^{p^2}$, $2^{p^2}, \dots, (p-1)^{p^2}$.

La combinaison des résultats obtenus donne la seconde forme (9.).

La première forme devient illusoire lorsque $2^{2k}-1 \equiv 0 \pmod{p}$. On a dans ce cas $\Sigma q_h h^{2k-1} \equiv 0$ et la seconde forme devient

$$(-1)^{k-1}\left(\frac{b_k}{2k} - (-1)^\nu \frac{b_{k+\nu}}{2(k+\nu)}\right) \equiv \Sigma q_h^2 h^{2k}.$$

Posons

$$S' = \Sigma q_h h^{2k-1}, \quad S'' = \Sigma q_h^2 h^{2k}.$$

La comparaison des deux formes (9.) donne, dans le cas où B_k est divisible par p,

$$(10.) \qquad S'(1-2^{2k-1}) + S''(1-2^{2k}) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Cette égalité peut être établie directement. Il suffit pour cela d'appliquer aux deux sommes la transformation du no. 1 qui nous a servi à obtenir la relation (5.).

L'égalité (10.) a encore lieu, si $2^{2k}-1 \equiv 0 \pmod{p}$, mais il n'est plus permis d'écrire $\frac{S'(1-2^{2k-1})}{1-2^{2k}} \equiv -S''$ et la seconde forme (9.) n'est plus une conséquence de la première. Si B_k n'est pas divisible par p, on a la relation suivante entre B_k et $B_{k+\nu} \pmod{p^2}$:

$$(-1)^{k-1}\left(\frac{B_k}{2k} - (-1)^\nu \frac{B_{k+\nu}}{2k-1}\right) + (-1)^{k-1}\frac{B_k}{2k(2k-1)}\cdot p \equiv p(\Sigma q_h^2 h^{2k} + \Sigma q_h h^{2k-1})$$
$$(h=1,2,\dots,\nu)$$

et la relation (10.) doit être remplacée par la suivante

$$S'(1-2^{2k-1}) + S''(1-2^{2k}) \equiv q_2 \frac{2^{2k-1}}{2^{2k}-1} \Sigma h^{2k-1} \pmod{p}. \quad (h=1,2,\dots,\nu)$$

Rationale Tetraeder.

(Von Herrn *K. Schwering* in Düren.)

Unter einem ***rationalen*** Tetraeder verstehe ich ein solches, dessen Kanten und Inhalt rationale Zahlwerthe besitzen. Es ist natürlich immer möglich, durch Fortschaffung der Nenner ein rationales Tetraeder in ein solches zu verwandeln, dessen Kanten und Inhalt *ganzzahlige* Werthe besitzen.

Die Aufgabe, solche Tetraeder anzugeben, war mir lange bekannt und ich habe im Jahre 1891 in meinen „100 Aufgaben" öffentlich ausgesprochen, dass die Aufgabe meines Wissens noch nicht gelöst sei. Trotz vielfacher Bemühungen, bei denen ich mich der Unterstützung des Herrn *E. Lampe* zu erfreuen hatte, ist mir auch seither keine Lösung bekannt geworden. Ich glaube daher mit nachstehender von mir gefundenen Lösung nicht länger zurückhalten zu sollen.

Die Aufgabe ist unzweifelhaft von nicht geringem wissenschaftlichem Interesse. Nennen wir die vier Ecken des Tetraeders A, B, C, D, bezeichnen die Kanten

$$AB = c, \quad BC = a, \quad CA = b,$$
$$DC = h, \quad DA = f, \quad DB = g,$$

den Inhalt mit Δ, so ist $144\Delta^2$ eine homogene Form sechster Ordnung der sechs Variablen a, b, c, f, g, h. Wird $\Delta = 0$, so liegt der Punkt D in der Ebene ABC und wir haben die *Kummer*sche Aufgabe (dieses Journal Bd. 37 S. 1 ff.) vor uns, *rationale Vierecke* anzugeben. Diese Aufgabe ist von *Kummer* auf die bereits von *Euler* behandelte Aufgabe zurückgeführt, die Gleichung:

$$y^2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

in rationalen Zahlen zu lösen. *Kummer* geht bei seiner Lösung von der merkwürdigen Eigenschaft (S. 8 ob. Abh.) aus, dass bei einem Viereck mit

rationalen Seiten und Diagonalen auch die vier Abschnitte rational sind, in welche die Diagonalen sich theilen. Diese Eigenschaft wird von mir selbstverständlich nicht benutzt, da die Vierecksaufgabe für meine Lösung nur einen besonderen Fall darstellt. Trotzdem ist meine Lösung m. E. einfacher und naturgemässer als die von *Kummer* gefundene. Endlich sei mir gestattet, darauf hinzuweisen, dass meine Lösung in anderer Hinsicht auch die Verallgemeinerung einer anderen von *Euler* in seiner Algebra behandelten Aufgabe ist, nämlich der von *Euler* gegebenen Lösung des Systems

$$x^2+y^2 = u^2, \quad y^2+z^2 = v^2, \quad x^2+z^2 = w^2.$$

Sind nämlich x, y, z, u, v, w Kanten eines Tetraeders, so ist dasselbe an einer Ecke rechtwinklig und hat einen rationalen Inhalt: $\varDelta = \frac{1}{6}xyz$.

Nennen wir die Seiten der bei D liegenden körperlichen Ecke α, β, γ, so ist

$$(1.) \quad 36\varDelta^2 = f^2g^2h^2(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma).$$

Hiernach zerlegen wir die Aufgabe, rationale Tetraeder anzugeben in folgende *zwei* Aufgaben:

Erstens: Es sollen drei rationale Zahlen $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und zwar ihrer Grösse nach echte Brüche, so angegeben werden, dass der Ausdruck

$$(2.) \quad F = 1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

ein *Quadrat* werde.

Zweitens: Nachdem $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ als rationale Zahlen bestimmt sind, soll das System:

$$(3.) \quad a^2 = g^2+h^2-2gh\cos\alpha; \quad b^2 = h^2+f^2-2hf\cos\beta; \quad c^2 = f^2+g^2-2fg\cos\gamma$$

rational aufgelöst werden.

Die Lösung der ersten Aufgabe ist sehr einfach. Es ist

$$(4.) \quad F = (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)-(\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta)^2.$$

Mithin muss $(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)$ als Summe zweier Quadrate dargestellt werden können, wenn F ein Quadrat werden soll. Ertheilen wir also $1-\cos^2\alpha$ und $1-\cos^2\beta$ Bruchform, so wird der Nenner eine Quadratzahl, der Zähler aber muss bei der Zerlegung in Primfactoren solche von der Form $4n+3$ nur in gerader Potenz enthalten. Man kann also $1-\cos^2\alpha$ als Summe *zweier* rationalen Quadrate darstellen. Folglich muss jede Darstellung von 1 als Summe von *drei* rationalen Quadraten einen geeigneten Werth für $\cos\alpha$ liefern.

Dieselben Schlüsse gelten für $\cos\beta$. Ist aber $1-\cos^2\alpha$ und $1-\cos^2\beta$ als Summe je zweier rationalen Quadrate angebbar, dann gilt gleiches bezüglich ihres Productes und die Aufgabe ist gelöst. Um die Einheit als Summe von drei rationalen Quadraten darzustellen, geht man am besten von der Aufgabe aus, eine Quadratzahl zu bilden, welche gleich der Summe von drei Quadratzahlen ist. Wir fassen das Gesagte kurz in folgende Vorschrift:

Mit Hülfe der Gleichung:

$$(m^2+n^2+p^2+q^2)^2 = (m^2+n^2-p^2-q^2)^2+(2mp+2nq)^2+(2mq-2np)^2$$

verschaffen wir uns drei Quadrate, deren Summe wieder ein Quadrat ist: $Q^2 = M^2+N^2+P^2$. In entsprechender Weise seien vier andere Zahlen $Q'^2 = M'^2+N'^2+P'^2$ bestimmt. Dann liefern die Annahmen:

$$\cos\alpha = \frac{M}{Q}, \quad \cos\beta = \frac{M'}{Q'}, \quad \cos\gamma = \frac{MM'-NP'+PN'}{QQ'}$$

für F einen quadratischen Werth, dessen Wurzel ist:

$$\sqrt{F} = \pm\frac{NN'+PP'}{QQ'}.$$

Zahlenbeispiele: $9 = 1+4+4$.

1) $\left.\begin{matrix} M=1, & N=-2, & P=2 \\ M'=2, & N'=-1, & P'=2 \end{matrix}\right\}$ $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \frac{4}{9}$, $\sqrt{F} = \frac{2}{3}$.

2) $\left.\begin{matrix} M=1, & N=-2, & P=2 \\ M'=2, & N'=2, & P'=1 \end{matrix}\right\}$ $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \frac{8}{9}$, $\sqrt{F} = \frac{2}{9}$.

3) $\left.\begin{matrix} M=1, & N=-2, & P=2 \\ M'=2, & N'=2, & P'=-1 \end{matrix}\right\}$ $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \frac{4}{9}$, $\sqrt{F} = \frac{2}{3}$.

4) $\left.\begin{matrix} M=1, & N=-2, & P=2 \\ M'=2, & N'=-2, & P'=1 \end{matrix}\right\}$ $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = 0$, $\sqrt{F} = \frac{2}{3}$.

5) $\left.\begin{matrix} M=2, & N=+2, & P=1 \\ M'=3, & N'=4, & P'=0 \end{matrix}\right\}$ $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\gamma = \frac{2}{3}$, $\sqrt{F} = \frac{2}{5}$.

Soll der Punkt D in die Ebene ABC fallen, so nehmen wir entweder $\alpha+\beta+\gamma = 2\pi$ oder $\alpha = \beta+\gamma$ an. Um für die α, β, γ solche Werthe zu erhalten, dass die Cosinus rational werden, nehmen wir irgend ein Dreieck mit den ganzzahligen Seiten m, n, p und nennen seine Winkel α', β', γ'. Dann wird entweder $\alpha = \pi-\alpha'$, $\beta = \pi-\beta'$, $\gamma = \pi-\gamma'$ oder $\alpha = \pi-\alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ gesetzt.

Gehen wir zur Bearbeitung des zweiten Theils der Aufgabe. Die Darstellung der ganzen Zahlen f, g, h wird verlangt, welche den Gleichungen (3.) genügen sollen. Wir setzen $c = \nu g + f$, dann folgt

$$(5.)\qquad g = \frac{2\nu+2\cos\gamma}{1-\nu^2}\cdot f.$$

Ebenso setzen wir $b = \mu f + h$. Dann wird

$$(6.)\qquad f = \frac{2\mu+2\cos\beta}{1-\mu^2}\cdot h.$$

Endlich setzen wir $a = \lambda g + h$ und finden

$$(7.)\qquad g = \frac{2\lambda+2\cos\alpha}{1-\lambda^2}\cdot h.$$

Hieraus folgt:

$$(8.)\qquad \frac{g}{f} = \frac{1-\mu^2}{1-\lambda^2}\cdot\frac{\lambda+\cos\alpha}{\mu+\cos\beta} = \frac{2\nu+2\cos\gamma}{1-\nu^2}.$$

Nehmen wir $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 0$, so haben wir ein rechtwinkliges Tetraeder vor uns und die Aufgabe stellt sich in der Form dar:

$$\frac{1-\mu^2}{1-\lambda^2}\cdot\frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\nu}{1-\nu^2}.$$

Für diesen Fall hat bereits *Euler* in seiner Algebra die Lösung gegeben. Er setzt $\mu = \frac{\lambda p+1}{p+\lambda}$ und löst die sich ergebende Aufgabe, einen in λ entstehenden Ausdruck vierten Grades zu einem Quadrate zu machen. Die Lösung bleibt insofern unvollständig als es nicht gelingt nachzuweisen, dass alle überhaupt möglichen Lösungen durch das Verfahren erreicht werden. Dieses *Euler*sche Verfahren lässt sich mit genau gleichem Erfolge auf die allgemeinere Aufgabe anwenden. Man findet

$$(9.)\qquad -\lambda = \frac{p^2(1+\cos\gamma)+2p(\cos\alpha+\cos\beta)+1-\cos\gamma+2\cos\alpha\cos\beta}{4(p+\cos\beta)}.$$

Hier ist p beliebig und $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ nach obiger Vorschrift angebbar. Für

$$\cos\alpha = 0,\quad \cos\beta = \tfrac{2}{3},\quad \cos\gamma = -\tfrac{1}{3}$$

folgt z. B.:

$$-\lambda = \frac{p^2+2p+2}{6p+4};\quad \mu = \frac{\lambda p+1}{\lambda+p};$$

Demgemäss für $p = 0$, $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\mu = -2$

$$f = 8,\quad g = -12,\quad h = 9.$$

Oder, wenn man negative Vorzeichen vermeidet

$$\cos\alpha = 0, \quad \cos\beta = \tfrac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \tfrac{1}{3},$$
$$f = 8, \quad g = 12, \quad h = 9,$$
$$a = 15, \quad b = 7, \quad c = 12.$$

Der Inhalt dieses Tetraeders ist $\varDelta = 96$. Wir haben also eine sehr einfache Lösung vor uns. Allgemein erhält man für die oben festgesetzten Cosinuswerthe:

$$\begin{aligned} f &= (6p+4)(p^2-2p-4)(5p^2+2p-2), \\ g &= 6(6p+4)(p^2-1)(p^2+2p+2), \\ h &= 3(p^2-1)(p^2-4p-2)(p^2+8p+6). \end{aligned}$$

Für $p = -2$ erhält man

$$f = 112, \quad g = 72, \quad h = 135,$$
$$a = 153, \quad b = 103, \quad c = 152,$$
$$\varDelta = 120960.$$

Hiernach erscheint die allgemeine Lösung in der Form, dass die Kanten als Functionen höchstens sechsten Grades einer Variablen p dargestellt werden können, sobald über die drei Cosinus zweckmässig verfügt ist. Diesem Verhalten des Tetraeders entspricht als besonderer Fall das Viereck mit rationalen Seiten und Diagonalen. So findet man für $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} f &= (7p^2-4)(p^2-4)(2p-1). \\ g &= 8(p^2-1)(p^2+2)(2p-1), \\ h &= p(p^2-1)(p+4)(p^2-12p+8), \end{aligned}$$

Als Zahlenbeispiel folgt für $p = -\frac{1}{2}$

$$f = -120, \quad g = 192, \quad h = 133.$$

Dies führt zu dem rationalen Viereck $ABCD$, für welches ist:

$$AB = 133, \quad BC = 192, \quad CD = 168, \quad DA = 127, \quad AC = 283, \quad DB = 120.$$

Wir haben also folgendes Ergebniss: Bestimmt man drei rationale Cosinus derartig, dass der Ausdruck F Gl. (2.) entweder ein Quadrat oder Null ist, setzt dann λ gleich dem aus (9.) sich ergebenden Ausdruck, so liefern die Ausdrücke (6.), (7.) die drei Kanten f, g, h eines rationalen Tetraeders oder zwei Seiten und eine Diagonale eines rationalen Vierecks.

Dieser Lösung kann eine zweite an die Seite gestellt werden, welche die obige an Einfachheit bei weitem übertrifft. Setzen wir in Gleichung (8.) $\lambda=\mu$, so wird, dieselbe in Bezug auf λ linear und giebt also für λ sofort einen durch ν bestimmbaren Werth. Es ist nämlich alsdann:

$$(10.)\qquad \frac{\lambda+\cos\alpha}{\lambda+\cos\beta} = \frac{2\nu+2\cos\gamma}{1-\nu^2}.$$

Nehmen wir z. B. $\cos\alpha=-\frac{3}{7}$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=\frac{2}{7}$, so folgt $\lambda=-3$, wenn $\nu=-2$ genommen wird und es ergiebt sich das in den „100 Aufgaben" mitgetheilte Beispiel

$$f=6,\quad g=7,\quad h=8,\quad a=9,\quad b=10,\quad c=11,$$
$$\Delta = 48.$$

Ebenso folgt für $\cos\alpha=0$, $\cos\beta=\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=-\frac{1}{3}$ die allgemeinere Lösung:

$$\begin{aligned}
f &= 4(p^2-9)(p^2+6p-3),\\
g &= 24(p+1)(p^2+6p-3),\\
h &= 3(p^2+10p+1)(p^2+2p-7),\\
a &= 3(p^4+12p^3+46p^2-4p+25),\\
b &= 3p^4+20p^3+26p^2-60p+123,\\
c &= 4(p^2+2p+9)(p^2+6p-3).
\end{aligned}$$

Für $p=1$ folgt nach Wegschaffung der gemeinsamen Factoren und Vertauschung von g mit $-g$ das bereits oben erhaltene Beispiel $f=8$, $g=12$, $h=9$. Für $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=-\frac{1}{2}$, $\cos\gamma=\frac{1}{2}$, $\nu=2$ wird das rationale Viereck erhalten $ABCD$, in welchem $AB=48$, $BC=57$, $CD=73$, $DA=80$; und dessen Diagonalen $AC=63$, $BD=112$ sind. — Wie *Kummer* bemerkt hat, sind in einem rationalen Vierecke immer auch die Abschnitte der Diagonalen, in welche dieselben sich gegenseitig theilen, rational. Für dieses Viereck nun sind diese Abschnitte sogar ganze Zahlen, indem $OA=30$, $OB=42$, $OC=33$, $OD=70$ ist (für den Schnittpunkt O der Diagonalen). Selbstverständlich kann auch $\lambda=-\mu$ genommen werden. So führt die Annahme

$$\cos\alpha=\tfrac{23}{26},\quad \cos\beta=\tfrac{1}{26},\quad \lambda=-\tfrac{11}{26},\quad \mu=\tfrac{11}{26}$$

zu dem *Kummer*schen Beispiel des rationalen Vierecks

$$AB=97,\quad BC=273,\quad CD=208,\quad DA=208,\quad AC=352,\quad DC=185.$$

Zum Schluss stellen wir folgende Zahlenbeispiele rationaler Tetraeder zusammen:

a	b	c	f	g	h	Δ
$a = 30$,	$b = 21$,	$c = 17$,	$f = 5$,	$g = 18$,	$h = 24$,	$\Delta = 240$,
57,	44,	47,	40,	63,	36,	10080,
33,	44,	23,	16,	9,	36,	576,
14,	33,	21,	27,	24,	30,	720,
120,	199,	259,	49,	280,	200,	0,
4,	3,	3,	4,	3,	3,	$\frac{8}{3}$,
21,	16,	21,	12,	12,	27,	288,
54,	63,	43,	15,	42,	72,	1680,
56,	69,	21,	27,	24,	48,	2304,
12,	12,	8,	9,	9,	9,	96,
7,	7,	4,	7,	7,	12,	12,
19,	19,	12,	19,	19,	20,	300,
6,	6,	8,	9,	9,	9,	48.

Düren, im Januar 1895.

Studien über die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslagen.

(Erster Aufsatz.)

(Von Herrn *A. Kneser* in Dorpat.)

Die Theorie der kleinen Schwingungen eines materiellen Punktes oder Massensystems um eine Lage stabilen Gleichgewichts ist seit *Lagrange* und *Dirichlet* bekannt und wohl begründet. Bei der Betrachtung instabiler Gleichgewichtszustände pflegt man sich dagegen mit allgemeinen, nicht immer streng begründeten Angaben zu begnügen, und vernachlässigt interessante Specialfälle, z. B. die asymptotische Annäherung an die Gleichgewichtslage. Ich stelle mir daher die Aufgabe, die möglichen Bewegungsvorgänge in der Umgebung einer Lage labilen Gleichgewichts zunächst für einen in einer Ebene beweglichen Punkt zu untersuchen, und an diesem Specialfall Methoden auszubilden, welche bei allgemeineren Problemen der Dynamik ähnliche Discussionen ermöglichen.

§ 1.

Die Niveaulinien in der Nähe einer Lage labilen Gleichgewichts.

In einer Ebene bewege sich der materielle Punkt P, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, und dessen Masse die Einheit sei, unter der Wirkung einer Kraft, welche das Potential U besitzt. In der Umgebung einer Gleichgewichtslage O, die wir als Coordinatenanfangspunkt nehmen, sei das Potential eine reguläre analytische Function von x und y, sodass man bei passender Wahl der Coordinatenrichtungen setzen kann

$$U = \tfrac{1}{2}(ax^2+by^2)+\mathfrak{P}(x,\, y),$$

indem man unter $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe versteht, welche nur Glieder von mindestens dritter Dimension in x und y enthält, und durch a und b Con-

stante bezeichnet, für welche die Voraussetzung

$$a \geqq b > 0$$

eingeführt werde. Alsdann ist O für den Punkt P eine Lage labilen Gleichgewichts, für welche das Potential ein Minimum ist. Setzt man nämlich

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

so ist in der Entwickelung

$$U = \tfrac{1}{2}(a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi)r^2 + \mathfrak{P}(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$$

der Coefficient von r^2 von Null verschieden und nicht unterhalb der Grenze $\frac{1}{2}b$ gelegen; man kann also von O aus nach allen Richtungen Strecken ziehen, deren Länge oberhalb einer von Null verschiedenen Grenze bleibt, und auf welchen der Werth des Potentials U mit wachsendem Abstand von O zunimmt. Die Niveaulinien

$$(1.) \qquad U = \text{const.}$$

sind daher innerhalb eines gewissen den Punkt O umfassenden Gebiets einfache geschlossene Linien ohne Doppelpunkt, die sich in ihrem ganzen Verlauf von O so wenig, wie man will, entfernen, wenn die rechte Seite der Gleichung (1.) hinreichend klein genommen wird. Wenn dabei auf einer Niveaulinie das Potential grösser ist als auf einer zweiten, so wird diese von der ersten umschlossen.

Eine ähnliche Entwickelungsform wie das Potential hat die Grösse

$$W = U_x^2 + U_y^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + \mathfrak{Q}(x,\ y),$$

in welcher durch die Indices x und y, wie fortan immer geschehen soll, die partielle Differentiation nach den Coordinaten bezeichnet wird, und $\mathfrak{Q}$ eine Potenzreihe derselben Form wie $\mathfrak{P}$ bedeutet. Auch die Grösse W muss daher auf jeder von O ausgehenden Geraden für ein endliches Stück wachsen mit zunehmender Entfernung von O. Man kann daher um diesen Punkt herum ein Gebiet abgrenzen, innerhalb dessen die Grössen U_x und U_y nicht gleichzeitig verschwinden, abgesehen vom Punkte O selbst. Innerhalb eines solchen Gebietes hat, wenn in ihm das Potential sich regulär verhält, die Niveaulinie (1.) eine eindeutig bestimmte Tangente; für die Krümmung ergiebt sich aus den für die Niveaulinie geltenden Gleichungen

$$U_x + U_y \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$U_{xx} + 2U_{xy}\frac{dy}{dx} + U_{yy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + U_y\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

oder den aus ihnen durch Vertauschung von x und y gebildeten der Ausdruck:

$$(2.)\quad \frac{d^2y}{dx^2}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{d^2x}{dy^2}\left(1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{U_{xx}U_y^2-2U_{xy}U_xU_y+U_{yy}U_x^2}{(U_x^2+U_y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

in welchem der Nenner von Null verschieden ist. Nun ist die quadratische Form

$$\Phi(\xi,\ \eta) = U_{xx}\xi^2+2U_{xy}\xi\eta+U_{yy}\eta^2$$

für hinlänglich kleine Werthe von x und y definit und positiv, da sie sich für $x = y = 0$ auf die Form

$$a\xi^2+b\eta^2$$

reducirt; der Zähler des Ausdruckes (2.) kann also innerhalb des betrachteten Gebietes nur im Punkte O verschwinden, so lange die Determinante der Form $\Phi(\xi,\ \eta)$ nicht den Werth Null angenommen hat. So lange daher die Ungleichungen

$$(3.)\qquad U_x^2+U_y^2 > 0,\quad U_{xy}^2-U_{xx}U_{yy} < 0$$

bestehen, ist die Krümmung der Niveaulinie (1.) von Null verschieden und endlich, diese Linie daher von Wendepunkten und Spitzen frei.

Ein den Punkt O umfassendes, von einer Niveaulinie begrenztes Gebiet, innerhalb dessen und auf dessen Rande die Function U regulär bleibt und, von O abgesehen, die Ungleichungen (3.) bestehen, nennen wir ein Gebiet $\mathfrak{G}$. Innerhalb desselben wächst das Potentialniveau, wenn man sich längs eines durch O gezogenen Radiusvectors von diesem Punkte entfernt. Denn versteht man unter ε eine positive unendlich kleine Grösse und setzt

$$dx = \varepsilon x,\quad dy = \varepsilon y,\quad dU = \varepsilon(xU_x+yU_y) = \varepsilon V,$$

so ist die Grösse V zunächst für hinreichend kleine Werthe der Coordinaten positiv: da nun das Differential

$$\begin{aligned} dV &= U_x dx+U_y dy+U_{xx}x\,dx+U_{xy}(x\,dy+y\,dx)+U_{yy}y\,dy \\ &= \varepsilon(V+U_{xx}x^2+2U_{xy}xy+U_{yy}y^2) = \varepsilon(V+\Phi(x,\ y)) \end{aligned}$$

zufolge der zweiten Ungleichung (3.) positiv bleibt, so lange dies von V gilt, so kann diese Grösse beim Fortgang von O längs irgend eines Radiusvectors nicht abnehmen, sie bleibt also positiv, so lange das Gebiet $\mathfrak{G}$ nicht verlassen wird. Das Differential dU ist also bei dem bezeichneten Fortgange auch positiv; speciell kann man hieraus schliessen, dass das Potentialniveau auf irgend einer Niveaulinie des Gebietes $\mathfrak{G}$ grösser ist als auf einer von ihr umschlossenen. — Endlich sei noch bemerkt, dass die in

den Ungleichungen (3.) links stehenden Grössen, wenn man ein beliebig kleines den Punkt O umfassendes Gebiet ausschliesst, für den ganzen Rest des Gebietes $\mathfrak{G}$ oberhalb einer von Null verschiedenen Grenze verbleiben.

§ 2.

Erste Uebersicht der möglichen Bewegungen.

Bezeichnen wir fortan durch Accente die Ableitungen nach der Zeit t, so lehren die Bewegungsgleichungen

$$(4.)\qquad x'' = U_x, \quad y'' = U_y,$$

dass die Coordinaten x und y analytische Functionen der Zeit sind, die sich in der Umgebung des Werthes t_0 regulär verhalten, wenn der Punkt P zur Zeit t_0 im Innern des Gebietes $\mathfrak{G}$ liegt. Dasselbe gilt daher von dem Werth der Function U im Punkte P, dem Potentialniveau desselben, und für ihre nach der Zeit genommenen Ableitungen, sodass zur Bestimmung der Maxima und Minima die gewöhnliche Regel anwendbar ist. Nun bestehen offenbar die Gleichungen:

$$\frac{dU}{dt} = U_x x' + U_y y',$$

$$\frac{d^2U}{dt^2} = U_{xx}x'^2 + 2U_{xy}x'y' + U_{yy}y'^2 + U_x x'' + U_y y'',$$

oder mit Benutzung der Gleichungen (4.) und einer in § 1 eingeführten Bezeichnung

$$(5.)\qquad \frac{d^2U}{dt^2} = \Phi(x', y') + U_x^2 + U_y^2.$$

Diese Grösse ist, da die Form Φ definit und positiv ist, für das Gebiet $\mathfrak{G}$ stets positiv, abgesehen von dem Werthsystem

$$x = y = x' = y' = 0,$$

für welches offenbar das Potential seinen kleinsten Werth Null erreicht; daraus folgt, dass im Gebiete $\mathfrak{G}$ das Potentialniveau des Punktes P niemals ein Maximum und höchstens ein einziges Minimum haben kann. Wenn also der Werth von U im Punkte P einmal vom Abnehmen zum Zunehmen übergegangen ist, so bleibt er im Zunehmen, solange der Punkt P nicht die Grenze des Bereiches $\mathfrak{G}$ überschritten hat.

Man kann sich von dieser Thatsache leicht auch geometrisch Rechenschaft geben, wenn man bedenkt, dass die Kraft stets nach der concaven

Seite der Bahncurve des bewegten Punktes gerichtet sein muss. Andererseits ist im Gebiete 𝔊 die Kraft stets nach der convexen Seite der Niveaulinie gerichtet; Niveaulinie und Bahncurve können sich also nur äusserlich berühren. Nun vermehrt sich der Werth des Potentials nach der convexen Seite der Niveaulinie hin; wird sie also von der Bahncurve berührt, so ist für diese der Berührungspunkt ein Punkt kleinsten Potentialniveaus.

Aber die Gleichung (5.) lehrt noch mehr. Die Grösse U'' bleibt oberhalb einer von Null verschiedenen positiven Grenze γ, wenn der Punkt P in ein beliebig klein abgegrenztes Gebiet, welches den Punkt O umfasst, niemals eindringt. In diesem Falle kann der Punkt P nicht für unbegrenzt wachsende Werthe der Zeit im Gebiete 𝔊 bleiben, da sonst der Ungleichung

$$\frac{d^2U}{dt^2} > \gamma > 0$$

zufolge die Grösse U' und damit auch U selbst über alle Grenzen wachsen müsste, was innerhalb des Gebietes 𝔊 offenbar nicht möglich ist. Der Punkt P muss also entweder nach einem endlichen Zeitintervall das Gebiet 𝔊 verlassen, oder der Gleichgewichtslage O unbegrenzt nahe kommen.

Die erste dieser beiden Möglichkeiten stellt die gewöhnlich allein erwähnte, für das labile Gleichgewicht charakteristische Bewegungsart dar; der zweite Fall verlangt eine weitere Erörterung. Tritt er ein, so muss das Potentialniveau des Punktes P beständig im Sinken bleiben; denn hätte es einmal zu wachsen begonnen, so bliebe es im Wachsen, während es bei unbegrenzter Annäherung an O unter jede Grenze herabsinken müsste. Bleibt also der Punkt P für $t = \infty$ im Gebiete 𝔊, so nähert er sich der Grenzlage O an. Nun lautet die Gleichung der lebendigen Kraft

$$x'^2+y'^2 = 2(U+h);$$

wenn daher das Potential U unendlich klein wird, nähert sich die Geschwindigkeit dem Grenzwerth $\sqrt{2h}$. Wäre dieser von Null verschieden, so gälte dasselbe von $\Phi(x', y')$; denn der Werth dieser Form hat für alle der Gleichung

$$(6.) \qquad x'^2+y'^2 = 2h$$

genügenden Grössen x', y' ein von Null verschiedenes Minimum; also läge auch für alle Werthe x', y', die der Gleichung (6.) mit hinreichender Annäherung genügten, der Werth $\Phi(x', y')$ oberhalb einer positiven Grenze.

Dasselbe würde dann zufolge der Gleichung (5.) von U'' gelten; daraus könnte man wie vorher schliessen, dass die Grösse U unbegrenzt anwachsen müsste, was offenbar im Gebiete $\mathfrak{G}$ unmöglich ist.

Dabei ist leicht einzusehen, dass, wenn der Punkt P beständig im Gebiete $\mathfrak{G}$ bleibt, die Lage O nicht nach einem endlichen Zeitintervall erreicht werden kann, wenn nicht etwa der Punkt P dauernd in ihr verharrt. Denn da $h = 0$, würde die Lage O mit der Geschwindigkeit Null erreicht werden; durch die Festsetzung aber, dass für einen bestimmten endlichen Zeitpunkt t_0

$$x = y = x' = y' = 0$$

sei, definirt man ein Integralsystem der Bewegungsgleichungen völlig eindeutig; da diese Gleichungen bestehen, wenn der Punkt P dauernd in der Lage O verharrt, so können sie nicht für ein Integralsystem bestehen, welches für gewisse Zeitpunkte von Null verschiedene Werthe der Coordinaten x und y ergiebt. Man kann diese Thatsache aber noch in direct anschaulicher Weise herleiten.

Führt man in die Gleichung der lebendigen Kraft Polarcoordinaten ein vermittelst der Gleichungen

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r = OP,$$

so lautet sie in dem betrachteten Falle

$$(7.) \qquad r'^2 + r^2\varphi'^2 = 2(U+h) = 2U.$$

Nun ergiebt sich aus der Entwickelung

$$U = \tfrac{1}{2}(ax^2+by^2)+\mathfrak{P}(x,\ y),$$

dass bei passender Wahl der positiven Constanten g für hinreichend kleine Werthe von r

$$2U < g^2r^2;$$

dann ergiebt die Gleichung (7.):

$$(8.) \qquad r'^2 < g^2r^2.$$

Die Grösse r wird nun, sich stetig ändernd, bei unendlich abnehmendem Potentialniveau unendlich klein, erreicht also jeden unterhalb einer gewissen positiven Grenze liegenden Werth r_1 für einen gewissen Zeitpunkt t_1 zum letzten Male. Von einem bestimmten Moment t_1 an fassen wir alle Zeitintervalle ins Auge, in welchen $t > t_1$ ist, die Grösse r abnimmt, und ihren jeweiligen Werth zum letzten Male erreicht; in der Gesammtheit dieser Inter-

valle wird dann jeder Werth von r_1 bis 0 und zwar jeder ein einziges Mal von der Grösse r angenommen. Für diese Intervalle ergiebt die Relation (8.):

$$g\,dt > \frac{-dr}{r};$$

integrirt man diese Ungleichung über die bezeichneten Intervalle hin, so giebt die rechte Seite ein unendlich grosses Resultat, da nach r einfach von r_1 bis 0 zu integriren ist. Die Summe der bezeichneten Intervalle ist also unendlich gross; die Lage O wird vom Punkte P nicht nach endlicher Zeit erreicht.

Die Resultate dieses Paragraphen geben eine erste Uebersicht über die möglichen Arten der Bewegung in der Nähe des Punktes O: bewegt sich der Punkt P im Gebiete $\mathfrak{G}$, so muss er dasselbe entweder nach endlicher Zeit verlassen, oder er nähert sich mit beständig fallendem Potentialniveau der Gleichgewichtslage O unbegrenzt, ohne sie nach endlicher Zeit zu erreichen; letzterer Fall erfordert $h = 0$. Ob er sich verwirklichen lässt, bleibt zunächst dahingestellt.

§ 3.

Ein analytischer Hülfssatz.

Um den stetigen Uebergang der verschiedenen im Gebiete $\mathfrak{G}$ möglichen Bewegungsformen in einander übersehen zu können, leite ich einen analytischen Satz ab, der möglicherweise bekannt, jedenfalls sehr plausibel ist, der aber in den mir zur Verfügung stehenden Handbüchern nicht strenge bewiesen wird. Den Ausgangspunkt bildet dabei der auf Reihenentwickelung beruhende Beweis von *Cauchy* für die Existenz der Integrale beliebiger Differentialgleichungen.

Sind in dem Gleichungssysteme

$$\text{(1.)} \qquad \frac{du_\nu}{dt} = f_\nu(t,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die rechten Seiten analytische Functionen ihrer Argumente, die sich in der Umgebung eines Werthsystems $(0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ regulär verhalten, und zwar für alle Werthsysteme, die den Ungleichungen

$$\text{(2.)} \qquad |t| < a, \quad |u_\nu - \alpha_\nu| < 2b$$

genügen, so beschreibe man in der Ebene, welche die Werthe irgend einer complexen Variablen u_ν darstellt, um den Punkt α_ν einen Kreis vom

Radius b; innerhalb desselben sei β_ν ein beliebiger Punkt. Der um diesen mit dem Radius b beschriebene Kreis liegt ganz innerhalb des um den Punkt α_ν mit dem Radius $2b$ beschriebenen; hat man also

$$(3.)\qquad |\beta_\nu - \alpha_\nu| < b,$$

so sind für alle Werthsysteme, die den Ungleichungen

$$(4.)\qquad |t| < a, \quad |u_\nu - \beta_\nu| < b$$

genügen, auch die Relationen (2.) erfüllt; dabei haben offenbar a und b von den Grössen β_ν unabhängige Werthe.

Will man nun dasjenige Integralsystem der Gleichungen (1.) bilden, in welchem für $t = 0$ die Gleichungen

$$u_\nu = \beta_\nu$$

bestehen, so können nach *Cauchy**) die Grössen u_ν nach Potenzen von t entwickelt werden, und die Coefficienten sind dem absoluten Betrage nach kleiner als die entsprechenden in der Entwickelung einer leicht zu bildenden Grösse Y, für welche die Differentialgleichung

$$\frac{dY}{dt} = \frac{M}{\left(1-\frac{t}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)^n}$$

besteht; dabei ist M eine positive Grösse, welche für die durch die Relationen (4.) definirten Werthsysteme von den absoluten Beträgen der Functionen f_ν nicht erreicht wird. Man kann diese Grösse von den Werthen β_ν unabhängig machen, indem man für sie das Maximum der genannten Beträge in dem Gebiet (2.) nimmt. Die Entwickelung Y und demnach auch die Potenzreihen u_ν convergiren dann**) für

$$(5.)\qquad |t| < a\left(1 - e^{-\frac{b}{(n+1)Ma}}\right),$$

also auch in einem von der speciellen Wahl der Werthe β_ν unabhängigen Gebiete. Fixirt man innerhalb desselben den Werth t, so sind die einzelnen Glieder der Reihe u_ν dem absoluten Betrage nach kleiner als die entsprechenden der Reihe Y; da letztere von den Grössen β_ν nicht abhängen, so convergiren die Reihen u_ν, nachdem man t fixirt hat, gleichmässig für

---

*) *Picard,* Traité d'analyse t. II (1893). S. 308.

**) *Picard,* l. c. S. 309.

alle Werthsysteme β_ν, welche den Ungleichungen (3.) genügen. Nun sind offenbar die Coefficienten in der Entwickelung von u_ν nach Potenzen von t analytische Functionen der Grössen β_ν, die sich in dem unter (3.) definirten Gebiete regulär verhalten; dasselbe gilt also nach einem bekannten Satze von *Weierstrass**) auch von den gleichmässig convergenten Summen u_ν selbst. D. h. die Werthe, welche die Functionen u_ν für einen bestimmten, der Ungleichung (5.) genügenden Werth von t annehmen, sind analytische, im Gebiete (3.) reguläre Functionen der Anfangswerthe β_ν.

Wenn nun t_0 ein beliebiger Werth des Gebietes (5.) ist, in welchem die definirten Integrale u_ν die Werthe u_ν^0 annehmen; wenn ferner die Functionen f_ν in der Umgebung jedes Werthsystems $(t_0, u_1^0, \dots, u_n^0)$, das einem dem Gebiete (3.) angehörigen Werthsysteme β_ν entspricht, ein reguläres Verhalten zeigen, so kann man diejenigen Integrale des Systems (1.) bilden, welche für $t = t_0$ die Anfangswerthe u_ν^0 annehmen; sie bilden die analytische Fortsetzung der bisher betrachteten Functionen u_ν, und sind als Potenzreihen des Argumentes $t - t_0$ darstellbar in einem Bereiche $\mathfrak{B}$, der zum Theil über das Gebiet (5.) hinausreichen kann. Die Werthe der Functionen u_ν in einem Punkte t_1 des Gebietes $\mathfrak{B}$ sind dann nach dem Obigen analytische Functionen der Grössen $u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0$, welche sich in der Umgebung des für $\alpha_\nu = \beta_\nu$ erhaltenen Werthsystems derselben regulär verhalten. Die Functionswerthe u_ν für $t = t_1$ sind daher auch reguläre analytische Functionen der Grössen β_ν in der Umgebung des Werthsystems $\beta_\nu = \alpha_\nu$. Von t_1 ausgehend kann man in gleicher Weise zu neuen, möglicherweise ausserhalb des Gebietes $\mathfrak{B}$ liegenden Werthen fortschreiten und erhält so das folgende Resultat. Wenn in der Ebene der complexen Zahlen t längs einer stetigen Linie vom Punkte 0 zum Punkte T eine analytische Fortsetzung der Functionselemente u_ν möglich ist, welche durch ein beliebiges der Ungleichung (3.) genügendes Anfangswerthsystem

$$t = 0, \quad u_\nu = \beta_\nu,$$

charakterisirt sind; wenn man ferner bei jeder solchen Fortsetzung nur zu Werthsystemen $(t, u_1, u_2, \dots, u_n)$ kommt, für welche die Functionen f_ν ein reguläres Verhalten zeigen, so sind die für $t = T$ erhaltenen Werthe der Grössen u_ν analytische Functionen der Anfangswerthe β_ν, welche sich in der Umgebung des Werthsystemes $\beta_\nu = \alpha_\nu$ regulär verhalten.

*) *Weierstrass*, Werke Bd. I (1894) S. 70.

§ 4.

Die Existenz der als möglich erkannten Bewegungsarten.

Um das erhaltene Resultat auf die Bewegungsgleichungen des Punktes P anwenden zu können, schreiben wir dieselben in der Form

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dx'}{dt} = U_x, \quad \frac{dy'}{dt} = U_y,$$

und gehen davon aus, dass die rechten Seiten reguläre analytische Functionen der in ihnen vorkommenden Grössen sind, solange der Punkt P das Gebiet $\mathfrak{G}$ nicht verlassen hat. Fasst man also eine Bewegung ins Auge, welche von einem beliebig bestimmten Punkte A auf dem Rande des Gebietes $\mathfrak{G}$ mit der Geschwindigkeit v_0 beginnt, und verlässt dabei der Punkt P das Gebiet $\mathfrak{G}$ nicht in dem Zeitintervall von $t = 0$ bis $t = t_0$, so ändert sich die für letzteren Zeitpunkt erreichte Lage P_0 des Punktes P stetig mit der Anfangsrichtung; die Coordinaten des Punktes P_0 sind analytische Functionen des Winkels zwischen der Anfangsrichtung im Punkte A und einer festen Geraden, und zwar sind diese Functionen regulär in der Umgebung jedes Werthes des bezeichneten Winkels, für welchen eine Bewegung der angegebenen Beschaffenheit erhalten wird; dasselbe gilt von den Werthen der Grössen x' und y' zur Zeit t_0. Wenn daher der Punkt P bei einer Anfangsrichtung $\mathfrak{R}$ nach endlicher Zeit das Gebiet $\mathfrak{G}$ verlässt, und das diesem Gebiete angehörige Stück seiner Bahncurve durch $\mathfrak{C}$ bezeichnet wird, so erhält man bei jeder von $\mathfrak{R}$ hinreichend wenig, etwa um den Winkel δ abweichenden Anfangsrichtung $\mathfrak{R}'$ eine Bahncurve $\mathfrak{C}'$, auf welcher der Punkt P ebenfalls nach endlicher Zeit das Gebiet $\mathfrak{G}$ verlässt. Ordnet man die Punkte der Curven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ einander zu, welche nach gleichen Zeiträumen von A aus erreicht werden, so sind entsprechende Punkte von einander um weniger als die beliebig gegebene Länge δ_1 entfernt, und die Werthe jeder der Grössen x' und y' in ihnen sind beliebig wenig von einander verschieden, sobald der Winkel δ hinlänglich klein geworden ist.

Hieraus folgt, dass auch die Grösse

$$(6.) \qquad \frac{dU}{dt} = U_x x' + U_y y'$$

in entsprechenden Punkten bei beiden Bewegungen beliebig wenig verschiedene Werthe besitzt; grenzt man also längs der Curve $\mathfrak{C}$ ein Gebiet ab, innerhalb dessen diese Grösse oberhalb einer positiven oder unterhalb

einer negativen Grenze verbleibt, so gilt dasselbe von ihren Werthen, die sie in dem entsprechenden Zeitintervall bei der Bewegung längs der Curve $\mathfrak{C}'$ annimmt. Die Punkte, für welche die Grösse U' verschwindet, also die Punkte niedrigsten Potentialniveaus bei der einen und andern Bewegung werden daher nach Zeitintervallen erreicht, die beliebig wenig von einander verschieden sind; in ihnen haben also die Grössen x, y, x', y' bei der einen Bewegung Werthe, welche von den gleichbezeichneten bei der anderen beliebig wenig abweichen, sobald δ hinlänglich klein geworden ist.

In den Punkten niedrigsten Potentialniveaus hat man nun

$$U' = U_x x' + U_y y' = 0 \qquad (7.)$$

und es berühren sich im allgemeinen Niveaulinie und Bahncurve. Längs der ersteren kann eine bestimmte Fortgangsrichtung als die positive definirt werden, etwa diejenige, welche zur Richtung der äusseren Normale liegt wie die positive y-Axe zur positiven x-Axe des Coordinatensystems; geht man stetig von einer Niveaulinie zur anderen über, so ändern sich die positiven Fortgangsrichtungen ebenfalls stetig. Die Richtungscosinus der äusseren Normale sind, da diese nach der Richtung wachsender Werthe von U hinweist,

$$\frac{U_x}{\sqrt{U_x^2+U_y^2}}, \quad \frac{U_y}{\sqrt{U_x^2+U_y^2}},$$

wobei die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist; die Richtungscosinus der positiven Fortgangsrichtung sind daher

$$\frac{-U_y}{\sqrt{U_x^2+U_y^2}}, \quad \frac{U_x}{\sqrt{U_x^2+U_y^2}}. \qquad (8.)$$

Andererseits sind die Richtungscosinus der Bewegungsrichtung des Punktes die mit positiver Quadratwurzel gebildeten Grössen

$$\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \quad \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}. \qquad (9.)$$

Diese stimmen mit den Grössen (8.) beziehentlich überein oder sind ihnen entgegengesetzt in einem Punkte niedrigsten Potentialniveaus, je nachdem die Bewegungsrichtung des Punktes P mit der positiven Richtung der Niveaulinie übereinstimmt oder ihr entgegengesetzt ist. Wenn jedoch in dem betrachteten Punkte die Gleichung

$$x' = y' = 0$$

besteht, so werden die Ausdrücke (9.) illusorisch, ebenso die Ausdrücke (8.),

wenn der Punkt P die Lage O erreicht. Von diesen Fällen abgesehen hat man zufolge der Gleichung (7.)

$$\frac{y'}{U_x} = \frac{-x'}{U_y} = \frac{U_x y' - U_y x'}{U_x^2 + U_y^2} = \frac{V}{U_x^2 + U_y^2}$$

und der gemeinsame Werth dieser Brüche, von denen jedenfalls der dritte einen von Null verschiedenen Nenner hat, ist zufolge der angegebenen Beziehung zwischen den Grössensystemen (8.) und (9.) positiv oder negativ, je nachdem in dem betrachteten Punkte die Bewegungsrichtung des Punktes P mit der positiven Richtung der Niveaulinie übereinstimmt oder ihr entgegensetzt ist.

Offenbar ist nun V eine stetige Function der Grössen x, y, x', y', ändert sich also den oben erhaltenen Resultaten gemäss stetig beim Uebergange vom Punkte niedrigsten Potentialniveaus auf der Bahncurve $\mathfrak{C}$ zu dem Punkte gleicher Eigenschaft auf der Curve $\mathfrak{C}'$. Speciell betrachte man die von A mit der Geschwindigkeit v_0 tangential zur Randlinie des Gebietes $\mathfrak{G}$ in der einen und anderen Richtung ausgehenden Bewegungen; für sie ist A der Punkt niedrigsten Potentialniveaus und hat der Ausdruck V entgegensetzte Werthe. Da nun die Function U auch auf der Randlinie d. h. in einer beliebig kleinen Umgebung des Punktes A sich regulär verhält, so kann man auch auf die bezeichneten beiden Bewegungen und die von ihnen hinreichend wenig abweichenden, welche von A aus in das Gebiet $\mathfrak{G}$ hineinführen, die obigen Folgerungen aus § 3 anwenden; bei letzteren beiden Bewegungen liegen die Punkte niedrigsten Potentialniveaus beliebig nahe bei A, und bei der einen von ihnen ist V negativ, bei der anderen positiv. Unter den von A aus mit der Geschwindigkeit v_0 in das Gebiet $\mathfrak{G}$ hineinführenden Bewegungen giebt es daher solche, für welche der Ausdruck V im Punkte niedrigsten Potentialniveaus ein willkürlich vorgeschriebenes Vorzeichen besitzt.

Für jede dieser Bewegungen hat nach § 2 das Potentialniveau im Gebiete $\mathfrak{G}$ ein Minimum, sobald $h \gtreqless 0$. Bei Ausschluss des Falles $h = 0$ geht also die Grösse V stetig von positiven zu negativen Werthen über bei stetiger Aenderung der Anfangsrichtung $\mathfrak{R}$; daher giebt es unter den betrachteten Bewegungen solche, für welche in einem Punkte die Gleichungen

$$(10.) \qquad U' = U_x x' + U_y y' = 0, \quad V = U_x y' - U_y x' = 0$$

zusammen bestehen. Für $h > 0$ können zufolge der Gleichung der leben-

digen Kraft die Grössen x' und y' im Gebiete $\mathfrak{G}$ nicht zugleich verschwinden; daher schliesst man aus unseren Gleichungen

$$W = \begin{vmatrix} U_x & U_y \\ -U_y & U_x \end{vmatrix} = 0,$$

was nur im Punkte O eintreten kann; es giebt daher eine durch O gehende Bahncurve, auf welcher der Punkt P von A mit der Geschwindigkeit v_0 ausgeht. Hat man dagegen $h < 0$, so lehrt die Gleichung der lebendigen Kraft, dass O niemals erreicht werden, die Determinante W also nicht verschwinden kann; dann ergeben die Gleichungen (10.)

$$(11.) \qquad x' = y' = 0,$$

der Punkt P erreicht das Niveau der Geschwindigkeit Null.

Um diesen Fall näher zu untersuchen, nehmen wir an, die Gleichungen (11.) bestehen für $t = t_1$; durch $(x', y')_k$ sei eine ganze Function der Grössen x', y' bezeichnet, die nur Glieder von mindestens $k$ter Dimension enthält. Dann ergeben die Bewegungsgleichungen

$$(12.) \qquad x'' = U_x, \quad y'' = U_y$$

durch Differentiation

$$x''' = U_{xx}x' + U_{xy}y', \quad x^{IV} = U_{xx}U_x + U_{xy}U_y = (x', y')_2.$$

Bezeichnet man durch Φ, Ψ, Θ ganze rationale Verbindungen der partiellen Ableitungen von U, also von x' und y' freie Ausdrücke, so sei die für $k = 1, 2$ leicht zu verificirende Gleichung

$$(13.) \qquad x^{(2k+1)} = \Phi x' + \Psi y' + (x', y')_3$$

für irgend einen Werth von k bewiesen. Dann folgt

$$(14.) \quad \begin{cases} x^{(2k+2)} = \Phi x'' + \Psi y'' + \Theta^{(0)} x'^2 + 2\Theta^{(1)} x'y' + \Theta^{(2)} y'^2 + (x', y')_4, \\ \qquad\quad = \Phi^{(0)} + \Theta^{(0)} x'^2 + 2\Theta^{(1)} x'y' + \Theta^{(2)} y'^2 + (x', y')_4; \end{cases}$$

denn differentiirt man auf der rechten Seite der Gleichung (13.) die von x' und y' freien Grössen, so tritt jedesmal ein Factor x' oder y' auf, und die Dimension in diesen Grössen erhöht sich um Eins. Differentiirt man dagegen eine der Grössen x', y', so erniedrigt sich die Dimension um Eins; es tritt ein Factor x'' oder y'' auf, der nach den Gleichungen (12.) ausgedrückt werden kann. Die Differentiation der ersten beiden Glieder von $x^{(2k+1)}$ giebt daher entweder in x' und y' quadratische Glieder, oder solche, die diese Grössen nicht und nur die zweiten Ableitungen enthalten. Aus denselben

Gründen giebt die Formel (14.) mit Benutzung der Gleichungen (12.):

$$x^{(2k+3)} = \Phi^{(1)}x' + \Psi^{(1)}y' + (x', y')_3,$$

womit die Allgemeingültigkeit der Formel (13.) für alle ungeraden Ableitungen von x dargethan ist; dieselbe Ausdrucksform gilt natürlich für die Grössen $y^{(2k+1)}$. Unter der Annahme (11.) hat man also für $t = t_1$ allgemein:

$$x^{(2k+1)} = y^{(2k+1)} = 0.$$

Die Coordinaten x und y sind daher gerade Functionen von $t - t_1$, der Punkt P kehrt zur Zeit $t = t_1$ um und geht längs der schon durchlaufenen Bahn zurück, ein Resultat, welches von *Staude**) durch Infinitesimalbetrachtungen bewiesen worden ist.

Unter den von A ausgehenden Bahncurven mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 giebt es also für $h < 0$ solche, auf welchen diese Erscheinung der „congruenten Rückkehr der Bewegung in sich" nach der Bezeichnung von *Staude* eintritt.

Um endlich analoge Resultate für den Fall $h = 0$ zu erzielen, gehen wir davon aus, dass hier nach § 2 die Möglichkeit vorliegt, auf einer Bahncurve überhaupt kein Minimum des Potentialniveaus anzutreffen; in diesem Falle findet asymptotische Annäherung an die Lage O statt. Dabei hat die Grösse V auch jetzt für einige der Bewegungen einen positiven, für andere einen negativen Werth. Würde nun jede Bewegung, bei welcher der Punkt P von A aus mit der Geschwindigkeit v_0 in das Gebiet $\mathfrak{G}$ hineingeht, ein Minimum des Potentialniveaus darbieten, so würde für jede die Grösse V zu bilden sein; ihre verschiedenen Werthe könnten stetig in einander übergeführt werden, sie müsste also auch einmal verschwinden, sodass die Gleichungen (10.) zusammen beständen. Daraus würde eins der beiden Gleichungssysteme

$$x' = y' = 0, \quad U_x = U_y = 0$$

folgen, welche aber nach § 2 ausgeschlossen sind, da für $h = 0$ weder die Lage O noch die Geschwindigkeit Null erreicht werden kann. Somit folgt, dass in diesem Falle stets solche Bewegungen vorhanden sind, bei denen das Potentialniveau sich asymptotisch dem Werthe Null annähert.

Fassen wir die erhaltenen Resultate zusammen, so ergiebt sich folgendes Theorem:

---

*) *Staude,* Ein Beitrag zur Discussion der Bewegungsgleichungen eines Punktes. Math. Annalen Bd. XLI S. 240.

Der materielle Punkt P bewege sich in einer Ebene unter der Wirkung einer Kraft, deren Potential im Punkte O den Minimalwerth Null hat; dasselbe werde bei Annäherung an O unendlich klein wie das Quadrat des Abstandes von O und sei in der Umgebung dieses Punktes eine reguläre analytische Function des Ortes. Liegt dann der Punkt A in einer gewissen Umgebung von O, genauer in dem nach § 1 zu definirenden Gebiete 𝔊, und hat das Potential in A den Werth U_0, so giebt es unter den in A mit der willkürlich gegebenen Geschwindigkeit v_0 beginnenden Bewegungen des Punktes P 1) wenn $v_0^2 > 2U_0$ solche, bei welchen der Punkt P die Lage O erreicht; 2) wenn $v_0^2 < 2U_0$ solche, bei welchen der Punkt P auf der Niveaulinie $U = \frac{1}{2}v_0^2$ mit der Geschwindigkeit Null anlangt und dann auf der durchlaufenen Bahn zurückkehrt; 3) wenn $v_0^2 = 2U_0$ solche, bei denen der Punkt P sich der Lage O unbegrenzt nähert, ohne sie je zu erreichen.

§ 5.

Analytische Erörterung einiger der erhaltenen Resultate.

Ein Theil der erhaltenen Resultate, der Satz nämlich, dass bei gewissen Bewegungen eine asymptotische Annäherung an die Lage labilen Gleichgewichts eintritt, kann auch aus einem von *Poincaré**) bewiesenen Theoreme gefolgert werden, nach welchem unter gewissen Voraussetzungen eine periodische Lösung eines Differentialgleichungssystems andere ergiebt, die sich ihr asymptotisch annähern. Die periodische Lösung wäre in unserem Falle diejenige, bei welcher der Punkt *P* dauernd in der Gleichgewichtslage ruht. Wir wenden die Methoden des genannten Forschers auf unser Problem in derjenigen Form an, welche ihnen neuerdings von *Picard***) gegeben worden ist.

In den Bewegungsgleichungen

$$x'' = ax + \mathfrak{P}_x(x, y), \quad y'' = by + \mathfrak{P}_y(x, y)$$

führen wir neue Variable ein, indem die Quadratwurzeln fortan stets positiv genommen werden:

$$x_1 = x' - x\sqrt{a}, \quad x_2 = y' - y\sqrt{b}, \quad x_3 = x' + x\sqrt{a}, \quad x_4 = y' + y\sqrt{b};$$

---

*) *Poincaré,* Les nouvelles méthodes de la mécanique céleste t. I (1892) p. 335 ff.

**) *Picard,* Traité d'analyse t. III (1894) p. 19.

setzt man ausserdem

$$\mathfrak{P}_x(x,\ y) = \mathfrak{P}_x\Big(\frac{x_3-x_1}{2\sqrt{a}},\ \frac{x_4-x_2}{2\sqrt{b}}\Big) = \mathfrak{P}^{(1)},$$

$$\mathfrak{P}_y(x,\ y) = \mathfrak{P}_y\Big(\frac{x_3-x_1}{2\sqrt{a}},\ \frac{x_4-x_2}{2\sqrt{b}}\Big) = \mathfrak{P}^{(2)},$$

so nehmen die Bewegungsgleichungen folgende Form an:

$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1\sqrt{a}+\mathfrak{P}^{(1)}, & \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2\sqrt{b}+\mathfrak{P}^{(2)}, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = +x_3\sqrt{a}+\mathfrak{P}^{(1)}, & \dfrac{dx_4}{dt} = +x_4\sqrt{b}+\mathfrak{P}^{(2)}; \end{cases}$$

dabei enthalten die Potenzreihen $\mathfrak{P}^{(1)}$ und $\mathfrak{P}^{(2)}$ offenbar nur Glieder, welche in x_1, x_2, x_3, x_4 von mindestens zweiter Dimension sind. Statt dieser Gleichungen betrachten wir das folgende System partieller Differentialgleichungen

$$(2.)\quad \begin{cases} -\sqrt{a}y_1\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1}-\sqrt{b}y_2\dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} = -x_1\sqrt{a}+\mathfrak{P}^{(1)}, \\ -\sqrt{a}y_1\dfrac{\partial x_2}{\partial y_1}-\sqrt{b}y_2\dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} = -x_2\sqrt{b}+\mathfrak{P}^{(2)}, \\ -\sqrt{a}y_1\dfrac{\partial x_3}{\partial y_1}-\sqrt{b}y_2\dfrac{\partial x_3}{\partial y_2} = +x_3\sqrt{a}+\mathfrak{P}^{(1)}, \\ -\sqrt{a}y_1\dfrac{\partial x_4}{\partial y_1}-\sqrt{b}y_2\dfrac{\partial x_4}{\partial y_2} = +x_4\sqrt{b}+\mathfrak{P}^{(2)}; \end{cases}$$

ist eine Lösung dieses Gleichungssystemes

$$x_\nu = f_\nu(y_1,\ y_2), \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

so erhält man eine Lösung des Systemes (1.) in der Form

$$x_\nu = f_\nu(\alpha e^{-t\sqrt{a}},\ \beta e^{-t\sqrt{b}}),$$

indem unter α und β willkürliche Constante verstanden werden.

Die Gleichungen (2.) können nun nach *Picard* durch convergente Potenzreihen der Argumente y_1 und y_2, welche mit diesen verschwinden, aufgelöst werden, sobald alle Grössen

$$\frac{-p_1\sqrt{a}-(p_2-1)\sqrt{b}}{p_1+p_2-1},\quad \frac{-(p_1-1)\sqrt{a}-p_2\sqrt{b}}{p_1+p_2-1},$$

$$\frac{-p_1\sqrt{a}-p_2\sqrt{b}-\sqrt{a}}{p_1+p_2+1},\quad \frac{-p_1\sqrt{a}-p_2\sqrt{b}-\sqrt{b}}{p_1+p_2+1},$$

in welchen p_1 und p_2 ganze, nicht negative Zahlen bedeuten, deren Summe $\geqq 2$, dem absoluten Betrage nach oberhalb einer positiven Constanten liegen.

Diese Voraussetzung ist erfüllt, wenn nicht $\sqrt{a:b}$ eine ganze Zahl grösser als Eins ist. Man sieht ferner aus den Gleichungen (2.) für $a > b$ leicht, dass, wenn die Grössen x_ν mit y_1 und y_2 verschwinden sollen, nothwendig die Gleichungen

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_2} = \frac{\partial x_2}{\partial y_1} = \frac{\partial x_3}{\partial y_1} = \frac{\partial x_3}{\partial y_2} = \frac{\partial x_4}{\partial y_1} = \frac{\partial x_4}{\partial y_2} = 0,$$

bestehen müssen; für $a = b$ setzen wir sie voraus. Dagegen bleiben die Ableitungen $\frac{\partial x_1}{\partial y_1}$ und $\frac{\partial x_2}{\partial y_2}$ stets willkürlich; wir machen etwa für $y_1 = y_2 = 0$ die Annahme

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = \frac{\partial x_2}{\partial y_2} = 1.$$

Alsdann erhält man folgende die Gleichungen (2.) befriedigende, für gewisse Werthe der Variablen y convergente Entwickelungen:

$$(3.) \quad x_1 = y_1 + \mathfrak{P}_1(y_1, y_2), \quad x_2 = y_2 + \mathfrak{P}_2(y_1, y_2), \quad x_3 = \mathfrak{P}_3(y_1, y_2), \quad x_4 = \mathfrak{P}_4(y_1, y_2),$$

wobei $\mathfrak{P}_\nu$ Potenzreihen sind, die nur Glieder von mindestens zweiter Dimension enthalten. Hieraus erhält man nach dem oben bemerkten eine Lösung der Gleichungen (1.), wenn man setzt

$$(4.) \qquad y_1 = \alpha e^{-t\sqrt{a}}, \quad y_2 = \beta e^{-t\sqrt{b}},$$

und demnach eine Lösung der ursprünglichen Bewegungsgleichungen in folgender Form:

$$(5.) \quad \begin{cases} x_3 - x_1 = 2\sqrt{a}x = -\alpha e^{-t\sqrt{a}} + \mathfrak{P}_3(\alpha e^{-t\sqrt{a}}, \beta e^{-t\sqrt{b}}) - \mathfrak{P}_1(\alpha e^{-t\sqrt{a}}, \beta e^{-t\sqrt{b}}), \\ x_4 - x_2 = 2\sqrt{b}y = -\beta e^{-t\sqrt{b}} + \mathfrak{P}_4(\alpha e^{-t\sqrt{a}}, \beta e^{-t\sqrt{b}}) - \mathfrak{P}_2(\alpha e^{-t\sqrt{a}}, \beta e^{-t\sqrt{b}}). \end{cases}$$

Da nun die rechten Seiten dieser Gleichungen für $t = +\infty$ unendlich klein werden, ohne zu verschwinden, so ist von neuem bewiesen, dass es Bewegungen des Punktes P giebt, bei welchen er sich der Gleichgewichtslage O asymptotisch annähert. Doch leisten unsere früheren Entwickelungen insofern mehr, als sie das Gebiet $\mathfrak{G}$ genauer definiren, von dessen Punkten ausgehend man die bezeichneten Bewegungen erhalten kann, und als sie auch für ganzzahlige Werthe von $\sqrt{a:b}$ gültig sind. Dabei bleibt die Frage offen, ob die Formeln (5.) alle Bewegungen darstellen, bei welchen asymptotische Annäherung an die Gleichgewichtslage stattfindet.

Um nun den Verlauf der durch die Gleichungen (5.) definirten Bahncurven näher zu untersuchen, gehen wir auf die Gleichungen (3.) zurück,

aus denen sich ergiebt

$$(6.)\quad \begin{cases} x_3-x_1 = -y_1+\mathfrak{P}_3(y_1,\ y_2)-\mathfrak{P}_1(y_1,\ y_2), \\ x_4-x_2 = -y_2+\mathfrak{P}_4(y_1,\ y_2)-\mathfrak{P}_2(y_1,\ y_2). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen kann man y_1 und y_2 als Potenzreihen von x_3-x_1 und x_4-x_2 bestimmen, da die Potenzreihen $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_4$ keine linearen Glieder enthalten; setzt man die so erhaltenen Ausdrücke für y_1 und y_2 in die Gleichungen (3.) ein, so ergeben sich z. B. x_1+x_3 und x_2+x_4 als Potenzreihen mit den Argumenten x_3-x_1 und x_4-x_2, sodass man etwa setzen kann:

$$\frac{x_1+x_3}{2} = \mathfrak{Q}_1\Big(\frac{x_3-x_1}{2\sqrt{a}},\ \frac{x_4-x_2}{2\sqrt{b}}\Big),\quad \frac{x_2+x_4}{2} = \mathfrak{Q}_2\Big(\frac{x_3-x_1}{2\sqrt{a}},\ \frac{x_4-x_2}{2\sqrt{b}}\Big),$$

indem man unter $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ Potenzreihen versteht, welche mit Gliedern erster Dimension beginnen. Macht man in diesen für willkürliche Werthe der Grössen y_1 und y_2 geltenden Gleichungen die Substitution (4.), so ergiebt sich, dass für die durch die Formeln (5.) dargestellten Bewegungen die Gleichungen

$$(7.)\quad x' = \mathfrak{Q}_1(x,\ y),\quad y' = \mathfrak{Q}_2(x,\ y)$$

bestehen. Dabei schliesst man aus der Definition der Potenzreihen $\mathfrak{Q}$ leicht, dass sie die Form haben

$$\mathfrak{Q}_1(x,\ y) = -x\sqrt{a}+\cdots,\quad \mathfrak{Q}_2(x,\ y) = -y\sqrt{b}+\cdots,$$

indem die weggelassenen Glieder von mindestens zweiter Dimension sind.

Nun kann man weiter aus der Umkehrung der Gleichungen (6.) schliessen, dass für alle hinreichend kleinen Werthe von x_3-x_1 und x_4-x_2 entsprechende Werthe der Grössen y_1 und y_2 gefunden werden können; setzt man daher in den Gleichungen (4.) $t=0$, sodass

$$y_1 = \alpha,\quad y_2 = \beta,$$

so sieht man, dass die Constanten α und β in den Gleichungen (5.) derartig bestimmt werden können, dass der Punkt P zur Zeit $t=0$ eine beliebig gegebene Lage hat innerhalb eines gewissen hinlänglich kleinen Gebietes, welches den Punkt O umschliesst. Innerhalb dieses Gebietes kann man daher x und y als unabhängige Variable betrachten, und nach ihnen die Gleichung der lebendigen Kraft differentiiren, wenn man in ihr die Werthe (7.) einführt:

$$(8.)\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Q}_1^2+\mathfrak{Q}_2^2) = U, \\ \mathfrak{Q}_1\dfrac{\partial\mathfrak{Q}_1}{\partial x}+\mathfrak{Q}_2\dfrac{\partial\mathfrak{Q}_2}{\partial x} = U_x,\quad \mathfrak{Q}_1\dfrac{\partial\mathfrak{Q}_1}{\partial y}+\mathfrak{Q}_2\dfrac{\partial\mathfrak{Q}_2}{\partial y} = U_y. \end{cases}$$

Differentiirt man ferner die Gleichungen (7.) nach der Zeit, so folgt

$$x'' = U_x = \frac{\partial \mathfrak{Q}_1}{\partial x} x' + \frac{\partial \mathfrak{Q}_1}{\partial y} y' = \mathfrak{Q}_1 \frac{\partial \mathfrak{Q}_1}{\partial x} + \mathfrak{Q}_2 \frac{\partial \mathfrak{Q}_1}{\partial y},$$

$$y'' = U_y = \frac{\partial \mathfrak{Q}_2}{\partial x} x' + \frac{\partial \mathfrak{Q}_2}{\partial y} y' = \mathfrak{Q}_1 \frac{\partial \mathfrak{Q}_2}{\partial x} + \mathfrak{Q}_2 \frac{\partial \mathfrak{Q}_2}{\partial y},$$

woraus man mit Berücksichtigung der Gleichungen (8.) schliesst*)

$$\frac{\partial \mathfrak{Q}_1}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{Q}_2}{\partial x}.$$

Es giebt also eine Potenzreihe endlichen Convergenzbereiches von der Form

$$\text{(9.)} \qquad \mathfrak{R}(x,\ y) = \mathfrak{R} = -\tfrac{1}{2}(x^2\sqrt{a} + y^2\sqrt{b}) + \cdots,$$

für welche die Gleichungen

$$\mathfrak{Q}_1(x,\ y) = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x}, \quad \mathfrak{Q}_2(x,\ y) = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y},$$

und zufolge der Gleichung der lebendigen Kraft die Differentialgleichung

$$\text{(10.)} \qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y}\right)^2 = 2U = ax^2 + by^2 + \cdots$$

bestehen. Die Relationen (7.) lehren dann, dass die unter (5.) definirten Bahncurven die orthogonalen Trajectorien der Curven $\mathfrak{R}$ = const. sind. Weiss man einmal, dass die Gleichung (10.) durch eine convergente Potenzreihe der Form (9.) befriedigt werden kann, so kann man die Coefficienten derselben offenbar sehr leicht berechnen, ohne die Reihen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ bestimmt zu haben; man braucht nur auf beiden Seiten der Gleichung (10.) die Coefficienten entsprechender Glieder zu vergleichen. — Wir formuliren die neuen Ergebnisse dieses Paragraphen in folgendem Satze.

Kann man die reelle Function U in eine convergente Potenzreihe der Form

$$U = \tfrac{1}{2}(ax^2 + by^2) + \cdots, \qquad (a \geqq b > 0)$$

entwickeln und ist $\sqrt{a:b} - 1$ keine positive ganze Zahl, so giebt es eine reelle Potenzreihe $\mathfrak{R}$ von endlichem Convergenzbereich und der Form

$$\mathfrak{R} = -\tfrac{1}{2}(\sqrt{a}x^2 + \sqrt{b}y^2) + \cdots,$$

welche der Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y}\right)^2 = 2U$$

*) *Darboux,* Leçons sur la théorie générale des surfaces t. II (1889) p. 440.

genügt; dabei seien die Quadratwurzeln positiv, die weggelassenen Glieder in U und $\mathfrak{R}$ mindestens dritter Dimension in x und y. Die orthogonalen Trajectorien des Curvensystems $\mathfrak{R} = const.$ sind dann die Bahncurven eines Punktes mit den rechtwinkligen Coordinaten x und y, der sich unter der Wirkung einer Kraft, deren Potential U ist, bewegt und sich dem Coordinatenanfangspunkt, also einer Lage labilen Gleichgewichtes asymptotisch annähert.

Der geometrische Charakter dieses Bahncurvensystems ist hiernach, wie man auch aus den Formeln (5.) ersieht, derselbe wie derjenige der orthogonalen Trajectorien eines Systems concentrischer, ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsen. Ist $a > b$, so ist die Richtung jeder dieser Bahncurven schliesslich nahezu diejenige der y-Axe, also die Richtung, längs deren das Potential von O aus am schwächsten zunimmt; für $a = b$ dagegen convergirt in jeder beliebigen Richtung eine der bezeichneten Curven gegen den Punkt O.

Dorpat, Februar 1895.

Ueber den Zusammenhang zwischen den Fundamentaldeterminanten einer linearen Differentialgleichung *n*ter Ordnung und ihrer *n* Adjungirten.

(Von Herrn *E. Grünfeld* in Nikolsburg.)

1.

Schon lange war bekannt (*Jacobi*, d. Journ. Bd. 29), dass, wenn

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = D(y_1, y_2, \dots, y_n) = D_n$$

d. i. die Determinante eines Fundamentalsystems von Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung

$$(1.) \qquad P(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_n y = 0$$

nach den Elementen der letzten Zeile entwickelt wird, die durch diese Determinante dividirten Adjuncten, also die Grössen:

$$\frac{1}{D_n} \frac{\partial D_n}{\partial y_1^{(n-1)}}, \quad \frac{1}{D_n} \frac{\partial D_n}{\partial y_2^{(n-1)}}, \quad \dots, \quad \frac{1}{D_n} \frac{\partial D_n}{\partial y_n^{(n-1)}}$$

gleichfalls die Lösungen einer solchen Gleichung sind, welche mit der *Lagrange*schen Multiplicatorgleichung von (1.):

$$(2.) \qquad P_1(z) = \frac{d^n z}{dx^n} - \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(p_1 z) + \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(p_2 z) - \dots + (-1)^n p_n z = 0$$

identisch ist, so zwar, dass die Relation stattfindet:

$$z P(y) + (-1)^{n-1} y P_1(z) = \frac{d}{dx} P(y, z),$$

wo

$$(3.)\quad \begin{cases} P(y,z) = z\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \left(p_1 z - \dfrac{dz}{dx}\right)\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \left(p_2 z - \dfrac{d}{dx}(p_1 z) + \dfrac{d^2 z}{dx^2}\right)\dfrac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + \cdots \\ \qquad \cdots + \left(p_{n-1} z - \dfrac{d}{dx}(p_{n-2} z) + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right) y \end{cases}$$

ist.

In neuerer Zeit aber ist von Herrn *J. Cels* (Comptes rendus, 15. Juli und 8. December 1890 und Annales de l'École Normale, 1891) der Nachweis erbracht worden, dass auch, wenn die Determinante D_n nach den Elementen einer beliebigen Zeile entwickelt wird, die durch dieselbe dividirten Adjuncten dieser Elemente, also die Grössen:

$$(4.)\quad u_1 = \frac{1}{D_n}\frac{\partial D_n}{\partial y_1^{(k-1)}},\quad u_2 = \frac{1}{D_n}\frac{\partial D_n}{\partial y_2^{(k-1)}},\quad \ldots,\quad u_n = \frac{1}{D_n}\frac{\partial D_n}{\partial y_n^{(k-1)}}$$

$(k = 1, 2, \ldots, n)$ einer solchen Differentialgleichung der $n$ten Ordnung, welche Herr *Cels* die „Adjungirte der $k$ten Zeile" nennt, genügen.

Ausgehend von dem Ausdrucke (3.) zeigt derselbe, dass diese Gleichung erhalten wird, wenn man aus den beiden Gleichungen:

$$(5.)\quad \begin{cases} u = p_{n-k} z - \dfrac{d}{dx}(p_{n-k-1} z) + \cdots + (-1)^{n-k}\dfrac{d^{n-k}z}{dx^{n-k}}, \\ 0 = p_n z - \dfrac{d}{dx}(p_{n-1} z) + \dfrac{d^2}{dx^2}(p_{n-2} z) - \cdots + (-1)^n \dfrac{d^n z}{dx^n} \end{cases}$$

oder, was offenbar dasselbe ist, aus:

$$(6.)\quad \begin{cases} u = p_{n-k} z - \dfrac{d}{dx}(p_{n-k-1} z) + \cdots + (-1)^{n-k}\dfrac{d^{n-k}z}{dx^{n-k}}, \\ \dfrac{d^k u}{dx^k} = \dfrac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(p_{n-k+1} z) - \dfrac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}(p_{n-k+2} z) + \cdots + (-1)^{k-1}(p_n z), \end{cases}$$

z, das ist, die Lösung der Gleichung (2.), eliminirt*).

Im 77. Bande dieses Journals hat Herr *Frobenius* bewiesen, dass zwischen den Lösungen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der Gleichung (1.) und den Lösungen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ von (2.), d. i. der Adjungirten der $n$ten Zeile die Beziehung stattfindet:

$$(7.)\quad D(y_1, y_2, \ldots, y_n).D(z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2}, \ldots, z_n) = D(y_1, \ldots y_\varkappa) \quad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n-1),$$

*) Es ist interessant zu bemerken, dass infolge der ersten der Gleichungen (5.) $P(y, z)$ die bemerkenswerthe Form annimmt:

$$P(y, z) = U_{(n)}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + U_{(n-1)}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + U_{(2)}\frac{dy}{dx} + U_{(1)}y,$$

wo $U_{(k)}$ die Lösung der Adjungirten der $k$ten Zeile bezeichnet.

die insbesondere für $\varkappa = 0$ lautet:

$$(7'.) \qquad D(y_1, \ldots, y_n) . D(z_1, \ldots, z_n) = 1.$$

Es bietet sich jetzt, wo das Vorhandensein der Adjungirten auch der anderen als der $n$ten Zeile von $D(y_1, \ldots, y_n)$ erwiesen ist, die Frage dar, welches die zu (7.) und (7'.) analogen Beziehungen sind, die zwischen $y_1, \ldots, y_n$ und den Lösungen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ irgend einer dieser Adjungirten stattfinden.

Die Relationen (7.) und (7'.) werden unmittelbar erhalten, wenn man die Determinante $D(y_1, \ldots, y_n)$ mit $D(z_{\varkappa+1}, \ldots, z_n)$ beziehungsweise mit $D(z_1, \ldots, z_n)$ zeilenweise multiplicirt. Versucht man bei einer der anderen Adjungirten in gleicher Weise vorzugehen, so findet man, dass eine Relation in geschlossener Form von ähnlicher Art wie die in (7.) nur noch bei der Adjungirten der ersten Zeile vorhanden ist und dass ferner die Relationen von der Form (7'.), welche die Beziehung zwischen den Determinanten $D(y_1, \ldots, y_n)$ und $D(u_1, \ldots, u_n)$ selbst ausdrücken, bei allen Adjungirten, von derjenigen der ersten Zeile wieder abgesehen, auf dem bezeichneten Wege nur sehr schwer abgeleitet werden können. Dies hängt damit zusammen, dass während die Relation (7'.) überhaupt frei von jedem Coefficienten der Differentialgleichung (1.) ist und, wie sich zeigen wird, die analoge Relation für die Adjungirte der ersten Zeile nur einen dieser Coefficienten enthält, diese Relationen für die übrigen Adjungirten im allgemeinen von allen p_k $(k = 1, \ldots, n)$ abhängig sind. Einfacher aber lassen sich dieselben herleiten, wenn man von dem bekannten Satze Gebrauch macht, dass in der Gleichung (1.), von einem constanten Factor abgesehen:

$$(8.) \qquad D(y_1, \ldots, y_n) = e^{-\int p_1 dx}$$

und dass ebenso:

$$(8'.) \qquad D(u_1, \ldots, u_n) = e^{-\int q_1 dx}$$

ist, wenn q_1 den Coefficienten von $\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$ in der Differentialgleichung der betreffenden Adjungirten bezeichnet.

Es werde also zunächst die Adjungirte der ersten Zeile betrachtet. Die Lösungen derselben sind:

$$(9.) \qquad u_k = \frac{(-1)^{k-1}}{D(y_1, \ldots, y_n)} \cdot \begin{vmatrix} y_1' & \ldots & y_{k-1}' & y_{k+1}' & \ldots & y_n' \\ y_1'' & \ldots & y_{k-1}'' & y_{k+1}'' & \ldots & y_n'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_{k-1}^{(n-1)} & y_{k+1}^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} . \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Die Determinante im Zähler ist offenbar: $D(y'_1, \dots, y'_{k-1}, y'_{k+1}, \dots, y'_n)$, und es können daher diese Lösungen geschrieben werden:

$$(10.) \qquad u_k = (-1)^{k-1} \frac{D(y'_1, \dots, y'_{k-1}, y'_{k+1}, \dots, y'_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}. \qquad (k = 1, \dots, n)$$

Aus der Definition derselben ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{l} y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n = 1, \\ y'_1 u_1 + y'_2 u_2 + \dots + y'_n u_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n-1)} u_1 + y_2^{(n-1)} u_2 + \dots + y_n^{(n-1)} u_n = 0, \end{array}$$

die, wenn

$$s_{\alpha\beta} = y_1^{(\alpha)} u_1^{(\beta)} + y_2^{(\alpha)} u_2^{(\beta)} + \dots + y_n^{(\alpha)} u_n^{(\beta)}$$

gesetzt wird, kurz so lauten:

$$(11.) \qquad s_{00} = 1, \quad s_{10} = 0, \quad s_{20} = 0, \quad \dots, \quad s_{n-1,0} = 0.$$

Leicht ergiebt sich aus den Gleichungen (11.) der Satz, dass allgemein $s_{\alpha\beta} = 0$ ist, wenn $\alpha+\beta$ eine der Zahlen $1, 2, \dots, n-1$ ist, und $s_{\alpha\beta} = (-1)^\beta s_{n0}$, wenn $\alpha+\beta = n$ ist. (Vgl. *Frobenius*, d. J. Bd. 77).

Bildet man daher das Product

$$D(y_1, y_2, \dots, y_n) . D(u_1, u_2, \dots, u_n),$$

indem man zeilenweise multiplicirt, so erhält man für dasselbe die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & s_{1,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s_{2,n-2} & s_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-3,n-3} & s_{n-3,n-2} & s_{n-3,n-1} \\ 0 & 0 & s_{n-2,2} & \dots & s_{n-2,n-3} & s_{n-2,n-2} & s_{n-2,n-1} \\ 0 & s_{n-1,1} & s_{n-1,2} & \dots & s_{n-1,n-3} & s_{n-1,n-2} & s_{n-1,n-1} \end{vmatrix},$$

die sich aber auf das Product

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} s_{n-1,1} s_{n-2,2} \dots s_{2,n-2} s_{1,n-1}$$

reducirt; letzteres aber ist dem obigen Satze zufolge gleich:

$$(-1)^{(n-1)(n-1)} s_{n0}^{n-1} = (-1)^{(n-1)(n-1)} \{y_1^{(n)} u_1 + y_2^{(n)} u_2 + \dots + y_n^{(n)} u_n\}^{n-1}.$$

Es ist aber, wie aus den Ausdrücken (9.) für die u_k unmittelbar hervorgeht:

$$(12.) \qquad y_1^{(n)} u_1 + y_2^{(n)} u_2 + \dots + y_n^{(n)} u_n = (-1)^{n-1} \frac{D(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)},$$

somit ist wegen $(-1)^{(n-1)(n-1)}.(-1)^{(n-1)(n-1)} = 1$:

$$(13.)\qquad D(y_1, y_2, \ldots, y_n).D(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \left\{\frac{D(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\right\}^{n-1}.$$

Hierzu ist Folgendes zu bemerken:

Die Coefficienten $p_1, \ldots, p_n$ der Differentialgleichung (1.) werden bekanntlich durch die Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ derselben so ausgedrückt:

$$(14.)\qquad p_k = \frac{(-1)^k}{D(y_1, \ldots, y_n)}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-k+1)} & y_2^{(n-k+1)} & \ldots & y_n^{(n-k+1)} \\ y_1^{(n-k-1)} & y_2^{(n-k-1)} & \ldots & y_n^{(n-k-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}, \quad (k = 1, \ldots, n)$$

also ist:

$$p_n = (-1)^n \frac{D(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

und die Formel (13.) geht über in die folgende:

$$(13'.)\qquad D(y_1, y_2, \ldots, y_n).D(u_1, u_2, \ldots, u_n) = p_n^{n-1},$$

die bereits, im Gegensatze zu der in (7'.), einen von den Coefficienten p_k enthält und die übrigens nach der zweiten angegebenen Methode mittelst (8.) und (8'.) sich sofort ergiebt.

Es ist nämlich die Differentialgleichung der Adjungirten der ersten Zeile:

$$(14.)\qquad \begin{cases} Q(u) = \dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\dfrac{1}{p_n}\dfrac{du}{dx}\right) - \dfrac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(\dfrac{p_1}{p_n}\dfrac{du}{dx}\right) + \dfrac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}\left(\dfrac{p_2}{p_n}\dfrac{du}{dx}\right) - \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{p_{n-1}}{p_n}\dfrac{du}{dx} + (-1)^n u = 0, \end{cases}$$

wie aus den beiden Gleichungen (6.) für $k = 1$ hervorgeht. Der Coefficient von $\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$ in dieser Gleichung ist:

$$-\left[p_1 + (n-1)\frac{d}{dx}\log p_n\right],$$

daher:

$$D(u_1, u_2, \ldots, u_n) = e^{\int\left[p_1 + (n-1)\frac{d}{dx}\log p_n\right]dx} = e^{\int p_1 dx}.p_n^{n-1},$$

woraus zufolge (8.) die Relation (13'.), abgesehen von einem constanten Factor, hervorgeht.

Ebenso wie die Relation (7'.) ein specieller Fall derjenigen in (7.) ist, so ist auch die in (13.) aus einer allgemeineren ableitbar, die wie folgt gefunden wird.

Multiplicirt man die Determinante $D(y_1, y_2, \dots, y_n)$ zeilenweise mit der Determinante:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_\varkappa & u_{\varkappa+1} & u_{\varkappa+2} & \dots & u_n \\ u'_1 & u'_2 & \dots & u'_\varkappa & u'_{\varkappa+1} & u'_{\varkappa+2} & \dots & u'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(\varkappa-1)} & u_2^{(\varkappa-1)} & \dots & u_\varkappa^{(\varkappa-1)} & u_{\varkappa+1}^{(\varkappa-1)} & u_{\varkappa+2}^{(\varkappa-1)} & \dots & u_n^{(\varkappa-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

welche gleich ist

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_\varkappa \\ u'_1 & u'_2 & \dots & u'_\varkappa \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(\varkappa-1)} & u_2^{(\varkappa-1)} & \dots & u_\varkappa^{(\varkappa-1)} \end{vmatrix} = D(u_1, u_2, \dots, u_\varkappa),$$

so ergiebt sich zum Producte die Determinante:

$$\begin{vmatrix} s_{00} & s_{01} & \dots & s_{0,\varkappa-1} & y_\varkappa & y_{\varkappa+1} & \dots & y_n \\ s_{10} & s_{11} & \dots & s_{1,\varkappa-1} & y'_\varkappa & y'_{\varkappa+1} & \dots & y'_n \\ s_{20} & s_{21} & \dots & s_{2,\varkappa-1} & y_\varkappa^{(2)} & y_{\varkappa+1}^{(2)} & \dots & y_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1,0} & s_{n-1,1} & \dots & s_{n-1,\varkappa-1} & y_\varkappa^{(n-1)} & y_{\varkappa+1}^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

welche zufolge der Formeln (11.) und des aus diesen abgeleiteten Satzes sich reducirt auf:

$$(-1)^{(\varkappa-1)(n-1)} s_{n0}^{\varkappa-1}. D(y'_{\varkappa+1}, y'_{\varkappa+2}, \dots, y'_n),$$

woraus mit Rücksicht auf Formel (12.) sich die Beziehung ergiebt:

$$(15.)\quad \begin{cases} D(y_1, y_2, \dots, y_n). D(u_1, u_2, \dots, u_\varkappa) \\ \qquad = \left\{\dfrac{D(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}\right\}^{\varkappa-1}. D(y'_{\varkappa+1}, y'_{\varkappa+2}, \dots, y'_n), \end{cases}$$

die für $\varkappa = 1, \dots, n$ gilt.

Für $\varkappa = 1$ ergiebt sich aus derselben die Formel (9.), wenn daselbst $k = 1$ ist, und für $\varkappa = n$ die Relation (13.).

Bekanntlich (vgl. *Frobenius*, d. J. Bd. 77) kann der erste Theil der Differentialgleichung (1.) in der Form dargestellt werden:

$$(16.)\qquad P(y) = \frac{D_n}{D_{n-1}}\frac{d}{dx}\frac{D_{n-1}^2}{D_n D_{n-2}}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}\frac{D_1^2}{D_2 D_0}\frac{d}{dx}\frac{y}{D_1},$$

wo $D_i = D(y_1, \ldots, y_i)$ ist. Aus dieser Darstellung ergiebt sich diejenige in Form eines symbolischen Productes (d. J. Bd. 98):

$$(17.)\qquad P(y) = A_n A_{n-1} \ldots A_2 A_1,$$

wo

$$(18.)\qquad A_i = \frac{dy}{dx} - a_i y,\quad a_i = \frac{d}{dx}\log\frac{D_i}{D_{i-1}}\qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Ferner kann der erste Theil der Differentialgleichung (2.) in der Form geschrieben werden:

$$P_1(z) = \frac{D_0}{D_1}\frac{d}{dx}\frac{D_1^2}{D_2 D_0}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}\frac{D_{n-1}^2}{D_n D_{n-2}}\frac{d}{dx}\frac{D_n}{D_{n-1}}z,$$

woraus gleichfalls die Darstellung als symbolisches Product folgt:

$$P_1(z) = \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\ldots\mathfrak{A}_{n-1}\mathfrak{A}_n,$$

wo

$$\mathfrak{A}_i = \frac{dz}{dx} + \frac{d}{dx}\log\frac{D_i}{D_{i-1}}z\qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ist.

Mit Hülfe der aus (15.) folgenden Formel:

$$(15'.)\qquad D(u_1, u_2, \ldots, u_\varkappa) = \frac{D(y'_1, \ldots, y'_n)^{\varkappa-1}}{D(y_1, \ldots, y_n)^\varkappa}\cdot D(y'_{\varkappa+1}, y'_{\varkappa+2}, \ldots, y'_n)$$

lässt sich nunmehr auch der erste Theil der Adjungirten der ersten Zeile, d. i. der Gleichung (14.), in der Form eines symbolischen Productes darstellen.

Zunächst kann dieselbe nämlich in der mit (16.) analogen Form geschrieben werden:

$$(19.)\qquad \begin{cases} Q(u) = \dfrac{D(u_1, \ldots, u_n)}{D(u_1, \ldots, u_{n-1})}\dfrac{d}{dx}\dfrac{D(u_1, \ldots, u_{n-1})^2}{D(u_1, \ldots, u_n)D(u_1, \ldots, u_{n-2})}\dfrac{d}{dx}\cdots \\ \qquad\qquad \cdots\dfrac{d}{dx}\dfrac{D(u_1)^2}{D(u_1, u_2)D_0(u)}\dfrac{d}{dx}\dfrac{u}{D(u_1)}. \end{cases}$$

Aus (15'.) ergiebt sich aber:

$$\frac{D(u_1, \ldots, u_n)}{D(u_1, \ldots, u_{n-1})} = \frac{D(y'_1, \ldots, y'_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)D(y'_n)}$$

und

$$\frac{D(u_1, \ldots, u_i)^2}{D(u_1, \ldots, u_{i+1})D(u_1, \ldots, u_{i-1})} = \frac{D(y'_{i+1}, y'_{i+2}, \ldots, y'_n)^2}{D(y'_{i+2}, \ldots, y'_n).D(y'_i, \ldots, y'_n)}.\qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Daher verwandelt sich die Gleichung (19.) in:

$$Q(u) = \frac{D(y'_1, \ldots, y'_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)D(y'_n)} \frac{d}{dx} \frac{D(y'_n)^2}{D(y'_{n-1}, y'_n)} \frac{d}{dx} \frac{D(y'_{n-1}, y'_n)^2}{D(y'_n)D(y'_{n-2}, y'_{n-1}, y'_n)} \frac{d}{dx} \cdots$$

$$\cdots \frac{d}{dx} \frac{D(y'_3, \ldots, y'_n)^2}{D(y'_4, \ldots, y'_n)D(y'_2, \ldots, y'_n)} \frac{d}{dx} \frac{D(y'_2, \ldots, y'_n)^2}{D(y'_3, \ldots, y'_n)D(y'_1, \ldots, y'_n)} \frac{d}{dx} \frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(y'_2, \ldots, y'_n)} u,$$

woraus sich die Darstellung in Form eines symbolischen Productes ergiebt:

$$Q(u) = Q_n Q_{n-1} \ldots Q_2 Q_1,$$

wo

$$Q_i = \frac{du}{dx} - q_i u,$$

$$q_i = \frac{d}{dx} \log \frac{D(y'_1, \ldots, y'_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)} \cdot \frac{D(y'_{i+1}, \ldots, y'_n)}{D(y'_i, \ldots, y'_n)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ist.

Zu derselben symbolischen Darstellung gelangt man auch, wenn man gemäss (17.) und (18.) zuerst schreibt:

$$Q(u) = A_n A_{n-1} \ldots A_2 A_1(u),$$

$$A_i(u) = \frac{du}{dx} - \frac{d}{dx} \log \frac{D(u_1, \ldots, u_i)}{D(u_1, \ldots, u_{i-1})}, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

und hierauf zufolge (15'.)

$$\frac{D(u_1, \ldots, u_i)}{D(u_1, \ldots, u_{i-1})} = \frac{D(y'_1, \ldots, y'_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)} \cdot \frac{D(y'_{i+1}, \ldots, y'_n)}{D(y'_i, \ldots, y'_n)}$$

setzt.

2.

Wie ungleich schwieriger es ist, die Beziehung zwischen den Determinanten $D(y_1, \ldots, y_n)$ und $D(u_1, \ldots, u_n)$ bei den übrigen Adjungirten durch directe Multiplication ersterer abzuleiten, mag aus einem einfachen Beispiele ersehen werden. Zuvor aber bemerke ich noch, dass, wie aus den Ausdrücken (14.) für die Coefficienten p_k der Gleichung (1.) und aus denjenigen für die Lösungen (4.): $U_{k1}, \ldots, U_{kn}$ der Adjungirten der $k$ten Zeile

$$U_{k1} = \frac{1}{D_n} \frac{\partial D_n}{\partial y_1^{(k-1)}}, \quad \ldots, \quad U_{kn} = \frac{1}{D_n} \frac{\partial D_n}{\partial y_n^{(k-1)}} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

unmittelbar hervorgeht, zwischen den p_k und diesen Lösungen die folgenden



Beziehungen stattfinden:

$$(20.)\quad \begin{cases} y_1^{(n)}U_{11} + y_2^{(n)}U_{12} + \cdots + y_n^{(n)}U_{1n} = -p_n, \\ y_1^{(n)}U_{21} + y_2^{(n)}U_{22} + \cdots + y_n^{(n)}U_{2n} = p_{n-1}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_1^{(n)}U_{n-1,1} + y_2^{(n)}U_{n-1,2} + \cdots + y_n^{(n)}U_{n-1,n} = (-1)^{n-1}p_2, \\ y_1^{(n)}U_{n1} + y_2^{(n)}U_{n2} + \cdots + y_n^{(n)}U_{nn} = (-1)^n p_1. \end{cases}$$

Für das erwähnte Beispiel sei $n = 3$ und es werde der Werth des Productes $D(y_1, y_2, y_3).D(u_1, u_2, u_3)$ bestimmt, wenn u_1, u_2, u_3 die Lösungen der Adjungirten der vorletzten Zeile, die hier mit der zweiten zusammenfällt, bezeichnen.

Für die vorletzte Zeile gilt allgemein, dass

$$s_{\alpha\beta} = y_1^{(\alpha)}u_1^{(\beta)} + \cdots + y_n^{(\alpha)}u_n^{(\beta)}$$

gleich Null ist für $\alpha+\beta < n-2$ und $\alpha+\beta = n-1$, hingegen gleich $(-1)^\beta$ für $\alpha+\beta = n-2$.

Mit Berücksichtigung dieses Satzes ergiebt sich:

$$(21.)\quad \begin{cases} D(y_1, y_2, y_3).D(u_1, u_2, u_3) = y_1^{(2)}u_1^{(2)} + y_2^{(2)}u_2^{(2)} + y_3^{(2)}u_3^{(2)} \\ \qquad = -(y_1^{(3)}u_1' + y_2^{(3)}u_2' + y_3^{(3)}u_3') - \frac{d}{dx}(y_1^{(3)}u_1 + y_2^{(3)}u_2 + y_3^{(3)}u_3). \end{cases}$$

Zufolge (20.) ist aber:

$$(22.)\qquad y_1^{(3)}u_1 + y_2^{(3)}u_2 + y_3^{(3)}u_3 = -p_2,$$

woraus folgt:

$$y_1^{(3)}u_1' + y_2^{(3)}u_2' + y_3^{(3)}u_3' = -p_2' - (y_1^{(4)}u_1 + y_2^{(4)}u_2 + y_3^{(4)}u_3)$$

$$= -p_2' + \frac{1}{D(y_1, y_2, y_3)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & y_3^{(2)} \\ y_1^{(4)} & y_2^{(4)} & y_3^{(4)} \end{vmatrix},$$

wenn nämlich u_1, u_2, u_3 durch ihre Werthe ersetzt werden:

$$u_1 = -\frac{1}{D_3}\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ y_2^{(2)} & y_3^{(2)} \end{vmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{D_3}\begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ y_1^{(2)} & y_3^{(2)} \end{vmatrix}, \quad u_3 = -\frac{1}{D_3}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} \end{vmatrix}.$$

Nun ist die Determinante:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & y_3^{(2)} \\ y_1^{(4)} & y_2^{(4)} & y_3^{(4)} \end{vmatrix} = \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & y_3^{(2)} \\ y_1^{(3)} & y_2^{(3)} & y_3^{(3)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & y_3^{(2)} \\ y_1^{(3)} & y_2^{(3)} & y_3^{(3)} \end{vmatrix},$$

oder zufolge (20.):

$$= \frac{d}{dx}(p_2 D_3)+p_3 D_3.$$

Also ist:

$$(23.)\quad y_1^{(3)}u_1'+y_2^{(3)}u_2'+y_3^{(3)}u_3' = -p_2'+\frac{1}{D_3}\frac{d}{dx}(p_2 D_3)+p_3 = -p_1p_2+p_3,$$

weil $D_3 = e^{-\int p_1 dx}$ ist. Mit Berücksichtigung von (22.) und (23.) geht die Gleichung (21.) über in die folgende:

$$(24.)\qquad D(y_1,\ y_2,\ y_3).D(u_1,\ u_2,\ u_3) = p_1p_2-p_3+p_2',$$

in welcher alle Coefficienten der Gleichung (1.) für $n = 3$ vorkommen.

Um nun nach der zweiten angegebenen Methode, d. i. mit Hülfe der Gleichungen (8.) und (8'.), den Werth des Productes $D(y_1, \dots, y_n).D(u_1, \dots, u_n)$ zu ermitteln, müssen die Gleichungen der Adjungirten in einer hierzu geeigneten Form aufgestellt werden. Dies geschieht mittelst der Gleichungen (6.) in den einzelnen Fällen wie folgt:

Es sei erstens $k = 2$.

Die Gleichungen (6.) lauten in diesem Falle:

$$(25.)\quad \frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}-\frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}(p_1 z)+\frac{d^{n-4}}{dx^{n-4}}(p_2 z)-\dots+(-1)^{n-2}p_{n-2}z = (-1)^{n-2}u$$

und

$$(26.)\qquad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}(p_{n-1}z)-(p_n z).$$

Die erstere Gleichung kann geschrieben werden:

$$\frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}(z'-p_1 z)+\frac{d^{n-4}}{dx^{n-4}}(p_2 z)-\dots+(-1)^{n-2}p_{n-2}z = (-1)^{n-2}u$$

oder, wenn für $z' = \frac{dz}{dx}$ der aus (26.) sich ergebende Werth:

$$(27.)\qquad z' = \frac{p_n-p_{n-1}'}{p_{n-1}}z+\frac{u^{(2)}}{p_{n-1}}$$

gesetzt wird:

$$(28.)\quad \begin{cases} \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}\left(\frac{u^{(2)}}{p_{n-1}}\right)+\frac{d^{n-4}}{dx^{n-4}}[(g_1 z)'+p_2 z]-\frac{d^{n-5}}{dx^{n-5}}(p_3 z)+\dots \\ \qquad\qquad \dots+(-1)^{n-2}p_{n-2}z = (-1)^{n-2}u, \end{cases}$$

wo

$$(29.)\qquad g_1 = \frac{p_n-p_{n-1}'}{p_{n-1}}-p_1$$

ist. Aus (28.) folgt weiter mit Hülfe von (27.):

$$\frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}\left(\frac{u^{(2)}}{p_{n-1}}\right)+\frac{d^{n-4}}{dx^{n-4}}\left(g_1\frac{u^{(2)}}{p_{n-1}}\right)+\frac{d^{n-5}}{dx^{n-5}}[(g_2 z)'-p_3 z]+\frac{d^{n-6}}{dx^{n-6}}(p_4 z)-\cdots = (-1)^{n-2}u,$$

wo

$$g_2 = g_1\frac{p_n-p'_{n-1}}{p_{n-1}}+g'_1+p_2$$

ist. So fortfahrend verwandelt man die Gleichung (25.) schliesslich in die folgende:

$$(30.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}\left(\dfrac{u^{(2)}}{p_{n-1}}\right)+\dfrac{d^{n-4}}{dx^{n-4}}\left(g_1\dfrac{u^{(2)}}{p_{n-1}}\right)+\dfrac{d^{n-5}}{dx^{n-5}}\left(g_2\dfrac{u^{(2)}}{p_{n-1}}\right)+\cdots \\ \qquad\cdots+\left(g_{n-3}\dfrac{u^{(2)}}{p_{n-1}}\right)+(-1)^{n-1}u = g_{n-2}z, \end{cases}$$

wo g_1 durch (29.) bestimmt und

$$(29'.)\qquad g_k = g_{k-1}\frac{p_n-p'_{n-1}}{p_{n-1}}+g'_{k-1}+(-1)^k p_k \qquad (k=2,\ldots,n-2)$$

ist.

Bezeichnet man mit $f(u)$ den ersten Theil der Gleichung (30.), schreibt dieselbe also:

$$(30.)\qquad f(u) = g_{n-2}z$$

und differentiirt, so ergiebt sich nach Wegschaffung von z' mittelst (27.):

$$(31.)\qquad \frac{df(u)}{dx} = \left[g_{n-2}\frac{p_n-p'_{n-1}}{p_{n-1}}+g'_{n-2}\right]z+\frac{u^{(2)}}{p_{n-1}}.$$

Durch Elimination von z aus (30.) und (31.) erhält man nunmehr als Gleichung der Adjungirten der zweiten Zeile die folgende:

$$\frac{df(u)}{dx}-\left[g_{n-2}\frac{p_n-p'_{n-1}}{p_{n-1}}+g'_{n-2}\right]\frac{f(u)}{g_{n-2}}-\frac{u^{(2)}}{p_{n-1}} = 0.$$

In derselben ist der Coefficient von $\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$ gleich:

$$-\left[p_1+(n-2)\frac{p'_{n-1}}{p_{n-1}}+\frac{g'_{n-2}}{g_{n-2}}\right],$$

es ist daher:

$$D(u_1,\ldots,u_n) = e^{\int\left[p_1+(n-2)\frac{d\log p_{n-1}}{dx}+\frac{d\log g_{n-2}}{dx}\right]dx},$$

woraus wegen Gleichung (8.) die gesuchte Relation folgt:

$$(32.)\qquad D(u_1,\ldots,u_n).D(y_1,\ldots,y_n) = g_{n-2}\cdot p_{n-1}^{n-2},$$

in welcher die Grösse g_{n-2} vermittelst (29.) und (29'.) als Function der Coefficienten $p_1, \ldots, p_n$ darstellbar ist.

Es sei ferner $k = 3$.

Die Gleichungen (6.) sind jetzt:

$$\frac{d^{n-3}z}{dx^{n-3}} - \frac{d^{n-4}}{dx^{n-4}}(p_1 z) + \frac{d^{n-5}}{dx^{n-5}}(p_2 z) - \cdots + (-1)^{n-3}(p_{n-3} z) = (-1)^{n-3}u, \tag{33.}$$

und:

$$\frac{d^3 u}{dx^3} = \frac{d^2}{dx^2}(p_{n-2} z) - \frac{d}{dx}(p_{n-1} z) + (p_n z). \tag{34.}$$

Schreibt man die erstere in der Form:

$$\frac{d^{n-5}}{dx^{n-5}}[z'' - (p_1 z)' + p_2 z] - \frac{d^{n-6}}{dx^{n-6}}(p_3 z) + \cdots + (-1)^{n-3}(p_{n-3} z) = (-1)^{n-3}u$$

und ersetzt z'' durch den aus (34.) sich ergebenden Werth:

$$z'' = \frac{p_{n-1} - 2p'_{n-2}}{p_{n-2}} \cdot z' - \frac{p''_{n-2} - p'_{n-1} + p_n}{p_{n-2}} \cdot z + \frac{u^{(3)}}{p_{n-2}}, \tag{35.}$$

so verwandelt sich dieselbe in:

$$\frac{d^{n-5}}{dx^{n-5}}\left(\frac{u^{(3)}}{p_{n-2}}\right) + \frac{d^{n-5}}{dx^{n-5}}(h_1 z' + k_1 z) - \frac{d^{n-6}}{dx^{n-6}}(p_3 z) + \cdots = (-1)^{n-3}u, \tag{36.}$$

wo

$$h_1 = \frac{p_{n-1} - 2p'_{n-2}}{p_{n-2}} - p_1, \quad k_1 = -\left(\frac{p''_{n-2} - p'_{n-1} + p_n}{p_{n-2}} + p'_1 - p_2\right) \tag{37.}$$

ist. Die Gleichung (36.) kann weiter so geschrieben werden:

$$\frac{d^{n-5}}{dx^{n-5}}\left(\frac{u^{(3)}}{p_{n-2}}\right) + \frac{d^{n-6}}{dx^{n-6}}[h_1 z'' + (h'_1 + k_1)z' + (k'_1 - p_3)z] + \frac{d^{n-7}}{dx^{n-7}}(p_4 z) - \cdots = (-1)^{n-3}u$$

oder, wenn z'' durch den Werth aus (35.) ersetzt wird:

$$\frac{d^{n-5}}{dx^{n-5}}\left(\frac{u^{(3)}}{p_{n-2}}\right) + \frac{d^{n-6}}{dx^{n-6}}\left(h_1 \frac{u^{(3)}}{p_{n-2}}\right) + \frac{d^{n-6}}{dx^{n-6}}(h_2 z' + k_2 z) + \frac{d^{n-7}}{dx^{n-7}}(p_4 z) - \cdots = (-1)^{n-3}u,$$

wo

$$h_2 = h_1 \frac{p_{n-1} - 2p'_{n-2}}{p_{n-2}} + h'_1 + k_1, \quad k_2 = -\left(h_1 \frac{p''_{n-2} - p'_{n-1} + p_n}{p_{n-2}} - k'_1 + p_3\right) \tag{37'.}$$

ist. So fortfahrend bringt man schliesslich die Gleichung (33.) auf die Form:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^{n-5}}{dx^{n-5}}\left(\frac{u^{(3)}}{p_{n-2}}\right) + \frac{d^{n-6}}{dx^{n-6}}\left(h_1 \frac{u^{(3)}}{p_{n-2}}\right) + \frac{d^{n-7}}{dx^{n-7}}\left(h_2 \frac{u^{(3)}}{p_{n-2}}\right) + \cdots \\ &\qquad + \left(h_{n-5} \frac{u^{(3)}}{p_{n-2}}\right) + (-1)^{n-2}u = -(h_{n-4} z' + k_{n-4} z), \end{aligned}\right. \tag{38.}$$

wo die Grössen h, k aus (37.) und (37'.) nach einander berechnet werden

können. Wird der erste Theil der letzten Gleichung wieder mit $f(u)$ bezeichnet und der Kürze wegen für $-h_{n-4}$, $-k_{n-4}$ beziehungsweise H, K gesetzt, so lautet dieselbe:

$$f(u) = Hz'+Kz.$$

Differentiirt man und setzt für z'' den Werth aus (35.), so folgt:

$$\frac{df(u)}{dx} = H_1 z'+K_1 z+H\frac{u^{(3)}}{p_{n-2}}$$

und hieraus durch abermaliges Differentiiren:

$$\frac{d^2f(u)}{dx^2} = H_2 z'+K_2 z+\Big(\frac{Hu^{(3)}}{p_{n-2}}\Big)'+H_1\frac{u^{(3)}}{p_{n-2}},$$

worin H_1, K_1, H_2, K_2 in leicht ersichtlicher Weise von den Grössen H, K und den in (35.) vorkommenden Coefficienten p_n, p_{n-1}, p_{n-2} abhängen.

Durch Elimination von z' und z aus den vorstehenden drei Gleichungen ergiebt sich die Gleichung der Adjungirten der dritten Zeile:

$$(38.)\quad \begin{cases} \Big[\frac{d^2f(u)}{dx^2}-\Big(\frac{Hu^{(3)}}{p_{n-2}}\Big)'-H_1\frac{u^{(3)}}{p_{n-2}}\Big].(HK_1-H_1K) \\ \qquad -\Big[\frac{df(u)}{dx}-\frac{Hu^{(3)}}{p_{n-2}}\Big].(HK_2-H_2K)+f(u).(H_1K_2-H_2K_1) = 0. \end{cases}$$

Indem für $f(u)$ der Werth aus (38.) gesetzt wird, erhält man als Coefficienten von $\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$ den Ausdruck:

$$-\Big[p_1+(n-3)\frac{p'_{n-2}}{p_{n-2}}+\frac{2p'_{n-2}-p_{n-1}}{p_{n-2}}+\frac{HK_2-H_2K}{HK_1-H_1K}\Big]$$
$$= -\Big[p_1+(n-1)\frac{p'_{n-2}}{p_{n-2}}+\Big(\frac{-p_{n-1}}{p_{n-2}}+\frac{HK_2-H_2K}{HK_1-H_1K}\Big)\Big],$$

daher ist in diesem Falle:

$$D(u_1, \ldots, u_n).D(y_1, \ldots, y_n) = p_{n-2}^{n-1}.A,$$

wo

$$\frac{d}{dx}\log A = \frac{-p_{n-1}}{p_{n-2}}+\frac{HK_2-H_2K}{HK_1-H_1K}$$

ist.

Die vorstehende Methode ist für jedes k anwendbar. Für $k=4$ z. B. ergiebt sich nach derselben:

$$D(u_1, \ldots, u_n).D(y_1, \ldots, y_n) = p_{n-3}^{n-1}.A_1,$$

wo

$$\frac{d}{dx}\log A_1 = \frac{-p_{n-2}}{p_{n-3}}+\frac{\Delta}{\Delta_1}$$

und Δ, Δ_1 Determinanten dritter Ordnung bezeichnen, deren Elemente von den p_k abhängend eine ähnliche Bedeutung haben wie die Grössen H_i, K_i im vorigen Falle.

Ich will nur noch zeigen, wie diese Methode bei den letzten $k = n-1$, $n-2$, ... anzuwenden ist.

Für $k = n-1$ lauten die Gleichungen (6.):

$$\frac{dz}{dx} - p_1 z + u = 0 \tag{39.}$$

und:

$$\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} = \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(p_2 z) - \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}(p_3 z) + \cdots + (-1)^{n-2}(p_n z). \tag{40.}$$

Aus (40.) folgt:

$$\left\{\begin{aligned} z^{(n-2)} = \frac{u^{(n-1)}}{p_2} - \Big[\frac{(n-2)p_2' - p_3}{p_2} \cdot z^{(n-3)} + \frac{(n-2)_2 p_2'' - (n-3)p_3' + p_4}{p_2} \cdot z^{(n-4)} + \cdots \\ \cdots + \frac{p_2^{(n-2)} - p_3^{(n-3)} + \cdots + (-1)^{n-3} p_n}{p_2} \cdot z \Big]. \end{aligned}\right. \tag{41.}$$

Aus (39.) folgt durch $(n-3)$-malige Differentiation die Gleichung:

$$\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} - \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}(p_1 z) + \frac{d^{n-3}u}{dx^{n-3}} = 0.$$

Wird in derselben $z^{(n-2)}$ durch den Werth aus (41.) ersetzt, so verwandelt sie sich in die folgende:

$$\frac{u^{(n-1)}}{p_2} - \left[p_1 + \frac{(n-2)p_2' - p_3}{p_2}\right] z^{(n-3)} + \cdots + u^{(n-3)} = 0, \tag{42.}$$

in welcher der Kürze wegen die Glieder mit $z^{(n-4)}$, ..., z', z weggelassen sind. Durch Differentiation folgt aus (42.) mit Zuhülfenahme des Werthes für $z^{(n-2)}$ aus (41.) die Gleichung:

$$\frac{d^n u}{dx^n} - \left[p_1 + \frac{(n-1)p_2' - p_3}{p_2}\right] \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + p_2 \left[\frac{(n-2)p_2' - p_3}{p_2}\right]^2 z^{(n-3)} + \cdots = 0, \tag{43.}$$

worin gleichfalls die Glieder mit $z^{(n-4)}$, $z^{(n-5)}$, ..., z', z weggelassen sind. Mittelst der Gleichung (39.) können aus (42.) und (43.) alle Derivirten $z^{(n-3)}$, $z^{(n-4)}$, ..., z' weggeschafft werden, so dass diese Gleichungen die Form annehmen:

$$\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-3}u}{dx^{n-3}} + \cdots = K.z, \tag{42'.}$$

beziehungsweise:

$$\frac{d^n u}{dx^n} - \left[p_1 + \frac{(n-1)p_2' - p_3}{p_2}\right] \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \cdots = K_1.z, \tag{43'.}$$

worin die Glieder mit $u^{(n-4)}$, $u^{(n-5)}$, ..., u', u weggelassen sind und K, K_1 nur von den p_k abhängige Grössen bedeuten. Durch Elimination von z aus (42'.) und (43'.) ergiebt sich nunmehr die Gleichung der Adjungirten der $(n-1)$-ten Zeile in der Form:

$$\frac{d^n u}{dx^n}-\left[p_1+\frac{(n-1)p_2'-p_3}{p_2}+\frac{K_1}{K}\right]\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\cdots = 0.$$

Daher gilt für diese Adjungirte die Beziehung:

$$D(u_1, \ldots, u_n).D(y_1, \ldots, y_n) = p_2^{n-1}.L,$$

wenn

$$\frac{d}{dx}\log L = \frac{-p_3}{p_2}+\frac{K_1}{K}$$

gemacht wird.

Im Falle $k = n-2$ wird die erste der Gleichungen (6.) $(n-5)$-mal differentiirt und in der hierdurch entstehenden Gleichung:

$$\frac{d^{n-3}z}{dx^{n-3}}-\frac{d^{n-4}}{dx^{n-4}}(p_1 z)+\frac{d^{n-5}}{dx^{n-5}}(p_2 z)-\frac{d^{n-5}u}{dx^{n-5}} = 0,$$

$z^{(n-3)}$ durch seinen aus der zweiten der Gleichungen (6.) resultirenden Werth ersetzt, im Uebrigen analog verfahren wie vorhin, wodurch schliesslich durch Elimination von z' und z aus drei Gleichungen die Adjungirte der $(n-2)$-ten Zeile in der Form hervorgeht:

$$\frac{d^n u}{dx^n}-\left[p_1+\frac{(n-1)p_3'-p_4}{p_3}+\frac{AB_2-A_2B}{AB_1-A_1B}\right]\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\cdots = 0,$$

wo die A_i und B_i nur von den p_k abhängende Grössen bedeuten. Also ist jetzt:

$$D(u_1, \ldots, u_n).D(y_1, \ldots, y_n) = p_3^{n-1}.L_1, \quad \frac{d}{dx}\log L_1 = -\frac{p_4}{p_3}+\frac{AB_2-A_2B}{AB_1-A_1B}.$$

Damit ist gezeigt, wie die der Relation (7'.) analoge für jede Adjungirte hergeleitet werden kann.

Nikolsburg am 27. Januar 1895.

Ueber die bei den linearen homogenen Differentialgleichungen auftretende Fundamentalgleichung.

(Von Herrn *M. Hamburger.*)

Im Folgenden soll für eine lineare homogene Differentialgleichung in y die zu einem geschlossenen Umlauf der unabhängigen Variablen x gehörige Fundamentalgleichung in zwei verschiedenen Formen hergestellt werden. In der einen treten die Werthe auf, die sämmtliche n Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen nebst ihren $n-1$ ersten Ableitungen zu Anfang und zu Ende eines einmaligen Umlaufs in einem Punkte der Umkreisungslinie annehmen. In die zweite Form gehen die Werthe ein, die *ein* beliebiges Integral und seine $n-1$ ersten Ableitungen in dem betrachteten Punkte der Reihe nach erhalten, wenn man den Umlauf n-mal hinter einander vollzieht.

Beschreibt die unabhängige Veränderliche x einer linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung in Beziehung auf die abhängige Veränderliche y mit eindeutigen Coefficienten eine geschlossene Curve, die mit einem nicht singulären Punkt x_0 beginnt und endigt und durch keinen der singulären Punkte der Differentialgleichung hindurchgeht, so kann man die zu diesem Umlauf gehörige Fundamentalgleichung, die bekanntlich von Herrn *Fuchs* zum ersten Mal entwickelt ist, in folgender Weise ableiten.

Ein Fundamentalsystem von Integralen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sei durch die für $x = x_0$ angenommenen Werthe

$$y_\varkappa = a_{\varkappa 1}, \quad y'_\varkappa = a_{\varkappa 2}, \quad \ldots, \quad y_\varkappa^{(n-1)} = a_{\varkappa n}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

wo $y^{(\lambda)} = \frac{d^\lambda y}{dx^\lambda}$ gesetzt ist, bestimmt.

Nach erfolgtem Umlaufe mögen $y_1, \ldots, y_n$ resp. in $\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n$ übergehen und die obigen Werthe für $x = x_0$ sich in

$$\overline{y}_\varkappa = b_{\varkappa 1}, \quad \overline{y}'_\varkappa = b_{\varkappa 2}, \quad \ldots, \quad \overline{y}_\varkappa^{(n-1)} = b_{\varkappa, n} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

verändern.

Das System

$$\bar{y}_1 - \omega y_1, \quad \bar{y}_2 - \omega y_2, \quad \ldots, \quad \bar{y}_n - \omega y_n,$$

wo ω eine beliebige Constante bedeutet, hat dann für $x = x_0$ die folgenden Werthe:

$$\bar{y}_\varkappa - \omega y_\varkappa = b_{\varkappa 1} - \omega a_{\varkappa 1}, \quad \bar{y}'_\varkappa - \omega y'_\varkappa = b_{\varkappa 2} - \omega a_{\varkappa 2}, \quad \ldots, \quad \bar{y}^{(n-1)}_\varkappa - \omega y^{(n-1)}_\varkappa = b_{\varkappa n} - \omega a_{\varkappa n}.$$
$$(\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

Wählt man nun für ω eine Wurzel ω_1 der Gleichung

$$|b_{\varkappa\lambda} - \omega a_{\varkappa\lambda}| = 0, \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

so giebt es n Grössen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, welche die n Gleichungen

$$\alpha_1(b_{1\lambda} - \omega_1 a_{1\lambda}) + \alpha_2(b_{2\lambda} - \omega_1 a_{2\lambda}) + \cdots + \alpha_n(b_{n\lambda} - \omega_1 a_{n\lambda}) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

erfüllen, ohne dass die α sämmtlich verschwinden. Es bestehen also für $x = x_0$ die Gleichungen:

$$\begin{array}{l}
\alpha_1(\bar{y}_1 - \omega_1 y_1) + \alpha_2(\bar{y}_2 - \omega_1 y_2) + \cdots + \alpha_n(\bar{y}_n - \omega_1 y_n) = 0, \\
\alpha_1(\bar{y}'_1 - \omega_1 y'_1) + \alpha_2(\bar{y}'_2 - \omega_1 y'_2) + \cdots + \alpha_n(\bar{y}'_n - \omega_1 y'_n) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_1(\bar{y}^{(n-1)}_1 - \omega_1 y^{(n-1)}_1) + \alpha_2(\bar{y}^{(n-1)}_2 - \omega_1 y^{(n-1)}_2) + \cdots + \alpha_n(\bar{y}^{(n-1)}_n - \omega_1 y^{(n-1)}_n) = 0.
\end{array}$$

$$\alpha_1(\bar{y}_1 - \omega_1 y_1) + \alpha_2(\bar{y}_2 - \omega_1 y_2) + \cdots + \alpha_n(\bar{y}_n - \omega_1 y_n)$$

ist also ein Integral, welches selbst nebst seinen $n-1$ ersten Ableitungen für den nicht singulären Punkt $x = x_0$ verschwindet, ein solches Integral muss aber identisch Null sein. Setzt man also

$$u = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n,$$

so erkennt man, dass das Integral u die Eigenschaft hat, bei dem fraglichen Umlauf in

$$\bar{u} = \omega_1 u$$

überzugehen. Die gesuchte Fundamentalgleichung ist demnach

$$|b_{\varkappa\lambda} - \omega a_{\varkappa\lambda}| = 0. \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

Werden die Anfangswerthe $a_{\varkappa\lambda}$ so gewählt, dass $a_{\varkappa\varkappa} = 1$, $a_{\varkappa\lambda} = 0$, wenn $\varkappa \gtrless \lambda$, dann erhält man die Fundamentalgleichung in der *Fuchs*schen Gestalt

$$\begin{vmatrix}
b_{11} - \omega & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\
b_{21} & b_{22} - \omega & \ldots & b_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} - \omega
\end{vmatrix} = 0.$$

Hiernach bedeutet die Grösse $b_{\varkappa\lambda}$ den Endwerth von $y_\varkappa^{(\lambda-1)}$ nach erfolgtem Umlauf in x_0, wenn beim Beginn desselben $y_\varkappa^{(\varkappa-1)} = 1$ und falls $\varkappa \gtrless \lambda$ $y_\varkappa^{(\lambda-1)} = 0$ festgesetzt war.

Herr *Schlesinger**) ist neulich auf einem gänzlich verschiedenen Wege zur Fundamentalgleichung gelangt, indem er von einem einzigen Integral ausgeht und seine durch mehrmalige Umkreisungen entstehenden Zweige betrachtet. Auch hier kann man aus der blossen Kenntniss der Anfangswerthe des Integrals und seiner $n-1$ ersten Ableitungen sowie der veränderten Werthe, die sie bei den n-maligen Umläufen der Reihe nach in x_0 annehmen, die Fundamentalgleichung ableiten.

Es sei für $x = x_0$

$$y = a_{00}, \quad y' = a_{01}, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)} = a_{0,n-1}.$$

Nach einem $\varkappa$-maligen Umlauf, wobei y in $\theta^\varkappa y$ übergehe, erhalte man in x_0 die Werthe

$$\theta^\varkappa y = a_{\varkappa 0}, \quad \theta^\varkappa y' = a_{\varkappa 1}, \quad \ldots, \quad \theta^\varkappa y^{(n-1)} = a_{\varkappa, n-1}. \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

Es ist dann

$$\xi_0 y + \xi_1 \theta y + \cdots + \xi_n \theta^n y = u,$$

worin $\xi_0, \ldots, \xi_n$ Constante bedeuten, ein Integral, welches mit seinen $n-1$ ersten Ableitungen für $x = x_0$ die Werthe

$$u = \xi_0 a_{00} + \xi_1 a_{10} + \cdots + \xi_n a_{n,0}, \quad u' = \xi_0 a_{01} + \xi_1 a_{11} + \cdots + \xi_n a_{n,1}, \quad \ldots,$$
$$u^{(n-1)} = \xi_0 a_{0,n-1} + \xi_1 a_{1,n-1} + \cdots + \xi_n a_{n,n-1}$$

annimmt.

Bestimmt man nun die $n+1$ Constanten ξ durch die n homogenen Gleichungen

$$\xi_0 a_{0\varkappa} + \xi_1 a_{1\varkappa} + \cdots + \xi_n a_{n\varkappa} = 0, \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n-1)$$

dann ist u ein Integral, welches für $x = x_0$ mit seinen $n-1$ ersten Ableitungen verschwindet, muss also identisch Null sein. Es ist daher für jedes x:

$$\xi_0 y + \xi_1 \theta y + \cdots + \xi_n \theta^n y \equiv \begin{vmatrix} y & \theta y & \ldots & \theta^n y \\ a_{00} & a_{10} & \ldots & a_{n0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{0,n-1} & a_{1,n-1} & \ldots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Es sei nun ω_1 eine Wurzel der algebraischen Gleichnng in ω

$$f(\omega) \equiv \xi_0 + \xi_1 \omega + \cdots + \xi_n \omega^n = 0$$

---

*) Dieses Journal Bd. 114 S. 143 ff.

und in Factoren zerlegt

$$f(\omega) = (\omega-\omega_1)(\eta_0+\eta_1\omega+\cdots+\eta_{n-1}\omega^{n-1}),$$

so ist auch, da $\theta\theta^{\varkappa}y = \theta^{\varkappa+1}y$

$$\xi_0 y+\xi_1\theta y+\cdots+\xi_n\theta^n y = \theta(\eta_0 y+\eta_1\theta y+\cdots+\eta_{n-1}\theta^{n-1}y) \\ -\omega_1(\eta_0 y+\eta_1\theta y+\cdots+\eta_{n-1}\theta^{n-1}y) = 0,$$

mithin ist

$$v = \eta_0 y+\eta_1\theta y+\cdots+\eta_{n-1}\theta^{n-1}x$$

ein Integral von der Eigenschaft, dass

$$\theta v = \omega_1 v.$$

Demnach lautet die Fundamentalgleichung*)

$$\xi_0+\xi_1\omega+\cdots+\xi_n\omega^n \equiv \begin{vmatrix} 1 & \omega & \dots & \omega^n \\ a_{00} & a_{10} & \dots & a_{n0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{0,n-1} & a_{1,n-1} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

wo $a_{\varkappa\lambda}$ den Werth von $y^{(\lambda)}$ nach $\varkappa$-maligem Umlauf oder den Werth von $\theta^{\varkappa}y^{(\lambda)}$ in x_0 bedeutet.

Zerlegt man $f(\omega)$ beliebig in zwei Factoren:

$$f(\omega) = (l_0+l_1\omega+\cdots+l_\lambda\omega^\lambda)(m_0+m_1\omega+\cdots+m_{n-\lambda}\omega^{n-\lambda}),$$

so ist auch

$$\xi_0 y+\xi_1\theta y+\cdots+\xi_n\theta^n y = (l_0+l_1\theta+\cdots+l_\lambda\theta^\lambda)(m_0 y+m_1\theta y+\cdots+m_{n-\lambda}\theta^{n-\lambda}y) = 0,$$

wobei der erste Factor auf der rechten Seite eine symbolische Operation bedeutet. Daraus folgt, dass das Integral

$$u = m_0 y+m_1\theta y+\cdots+m_{n-\lambda}\theta^{n-\lambda}y$$

der Gleichung

$$l_0 u+l_1\theta u+\cdots+l_\lambda\theta^\lambda u = 0 \text{**)}$$

genügt. Da somit schon zwischen den $\lambda+1$ Integralen $u, \theta u, \dots, \theta^\lambda u$ eine lineare homogene Relation besteht, so genügt u bereits einer linearen homo-

*) Vgl. *Schlesinger* a. a. O. S. 145.

**) ebenda S. 146 und 147.

genen Gleichung höchstens λter Ordnung, deren Coefficienten (der Coefficient von $u^{(\lambda)} = 1$ gesetzt) beim betrachteten Umlauf sich nicht ändern.

Zum Schluss noch folgende Bemerkung:

Aus der für jedes x gültigen Gleichung

$$\alpha_0(\bar{y}_1 - \omega y_1) + \alpha_2(\bar{y}_2 - \omega y_2) + \cdots + \alpha_n(\bar{y}_n - \omega y_n) = 0,$$

und den durch $n-1$-malige Differentiation aus ihr abgeleiteten folgt:

$$\begin{vmatrix} \bar{y}_1 - \omega y_1 & \dots & \bar{y}_n - \omega y_n \\ \bar{y}'_1 - \omega y'_1 & \dots & \bar{y}'_n - \omega y'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{y}_1^{(n-1)} - \omega y_1^{(n-1)} & \dots & \bar{y}_n^{(n-1)} - \omega y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0,$$

gültig für jedes x und für ein beliebiges Fundamentalsystem $y_1, \dots, y_n$. Die Fundamentalgleichung in dieser Gestalt hat von x abhängige Coefficienten; da aber die Wurzeln ω von x unabhängig sind, so müssen die Verhältnisse der Coefficienten von x unabhängig sein, was sich auch direct ergiebt, wenn man beachtet, dass

$$\bar{y}_x = c_{x1} y_1 + \cdots + c_{xn} y_n, \qquad (x = 1, 2, \dots, n)$$

also

$$\begin{vmatrix} \bar{y}_1 - \omega y_1 & \dots & \bar{y}_n - \omega y_n \\ \bar{y}'_1 - \omega y'_1 & \dots & \bar{y}'_n - \omega y'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{y}_1^{(n-1)} - \omega y_1^{(n-1)} & \dots & \bar{y}_n^{(n-1)} - \omega y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c_{11} - \omega & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \omega & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} - \omega \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ist.

Ebenso folgt aus der für jedes x geltenden Gleichung

$$\xi_0 + \xi_1 \theta y + \cdots + \xi_n \theta^n y = 0$$

und den durch $n-1$-malige Differentiation aus ihr abgeleiteten, sowie der Gleichung

$$\xi_0 + \xi_1 \omega + \cdots + \xi_n \omega^n = 0,$$

die Fundamentalgleichung in der Gestalt

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \dots & \omega^n \\ y & \theta y & \dots & \theta^n y \\ y' & \theta y' & \dots & \theta^n y' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y^{(n-1)} & \theta y^{(n-1)} & \dots & \theta^n y^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

mit von x abhängigen Coefficienten, deren Verhältniss, da die Wurzel ω von x unabhängig ist, ebenfalls constant sein muss. Der Factor, nach dessen Abtrennung die Coefficienten von x unabhängig werden, ist hier

$$\begin{vmatrix} y & \theta y & \dots & \theta^{n-1} y \\ y' & \theta y' & \dots & \theta^{n-1} y' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y^{(n-1)} & \theta y^{(n-1)} & \dots & \theta^{n-1} y^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Berlin, April 1895.

Nachruf.

Die Redaction hat die schmerzliche Pflicht zu erfüllen, des Verlustes dreier Mitarbeiter des Journals zu gedenken, welche seit kaum einem Jahre der wissenschaftlichen Welt durch den Tod entrissen worden sind.

Arthur Cayley, geboren am 16. August 1821 in Richmond Surrey, war bis zum Jahre 1863 als Barrister at Law thätig, in welchem Jahre er zum Saldrian Professor für die reine Mathematik in Cambridge gewählt wurde. Diese Stellung bekleidete er bis an sein Lebensende. Er starb am 26. Januar 1895.

Es ist uns versagt, hier den Lebenslauf sowie die reiche wissenschaftliche Thätigkeit des berühmten Gelehrten zu schildern, wie es ihm vergönnt war in die in unserem Jahrhundert für die mathematischen Wissenschaften neu errungenen Disciplinen schöpferisch und fördernd einzugreifen. In vorzüglicher Weise hat bereits Professor *A. R. Forsyth* in den Obituary Notices of the Proceedings of the Royal Society Vol. 58 das Leben und Wirken *Cayley*s geschildert (vgl. auch t. VIII of the collected mathematical papers (herausgegeben von *Forsyth*, woselbst sich auch ein Verzeichniss der Vorlesungen befindet, welche *Cayley* in dem Zeitraum von 1863 bis 1895 in Cambridge gehalten hat).

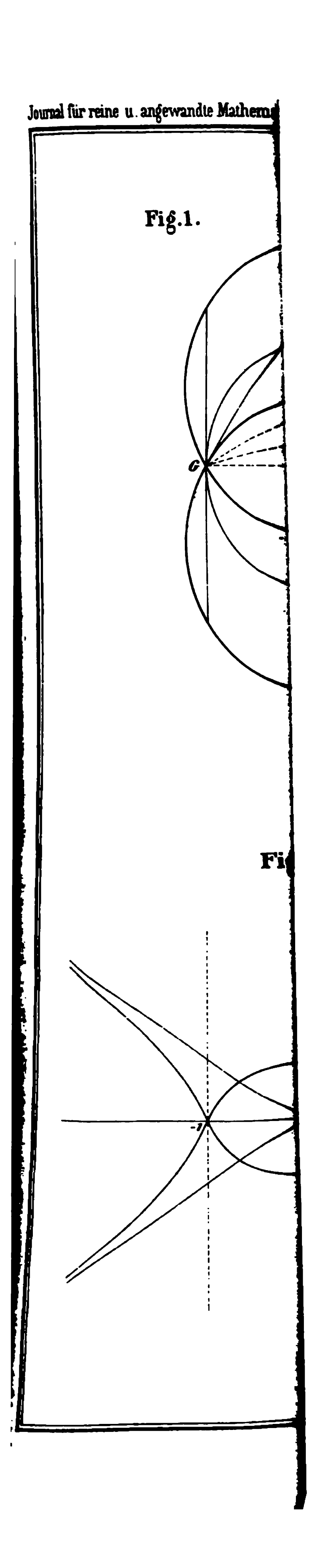
Die mathematischen Schriften *Cayley*s sind sehr zahlreich, ein grosser Theil derselben stammt schon aus der Periode vor 1863, indem während der Thätigkeit am Bar die Zeit zwischen der Jurisprudenz und der Mathematik getheilt war.

Cayley hat noch bei Lebzeiten eine vollständige Sammlung seiner Schriften unternommen, von welcher es ihm vergönnt war die sieben ersten Bände zu vollenden. Der weiteren Ausführung dieser Aufgabe hat sich in dankenswerther Weise Herr *Forsyth* unterzogen, aus dessen Händen wir jüngst den achten Band empfangen haben.

Unser Journal hat ganz besonderen Anlass das Andenken *Cayleys* in hohen Ehren zu halten. Vom 29. Bande des Journals an hat er dasselbe bis in sein letztes Lebensjahr durch seine unschätzbaren Beiträge ausgezeichnet.

Ludwig Schläfli, geboren am 15. Januar 1814 zu Burgdorf Canton Bern, gestorben am 20. März 1895 als Professor der Mathematik an der Universität Bern, bildete ebenfalls eine lange Reihe von Jahren hindurch — vom 43. Bande bis zum 78. — eine Zierde unseres Journals. Nachdem er eine Anzahl vorzüglicher Arbeiten aus den Gebieten der Geometrie, der Optik, der Astronomie in den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Bern, und besonders auf die Theorie der elliptischen Functionen bezügliche analytische Untersuchungen in *Grunerts* Archiv veröffentlicht hatte, war das *Crelle*sche Journal die Stätte, an welcher er sich durch seine Leistungen in der Algebra, in der Geometrie, in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, der Kugelfunctionen und der Modulargleichungen sowie in dem Probleme der conformen Abbildung ein unvergängliches Denkmal gesetzt hat.

Josef Dienger, geboren am 5. November 1818, von 1850 bis 1868 Professor der Mathematik und Vorstand der mathematischen Schule am Polytechnicum in Karlsruhe, von 1868 bis 1888 Director in der allgemeinen Versorgungsanstalt im Grossherzogthum Baden, starb am 27. November 1894. Ausser zahlreichen Schriften in *Grunerts* Archiv, in den Nouvelles Annales, im Journal von Tortolini, in den Denkschriften der Königl. Ges. d. Wissensch. zu Prag und der Kais. Akademie in Wien, sowie einer Reihe von Büchern zur Einführung in das Studium der Geometrie, der Analysis, der Geodäsie, der Mechanik, der elliptischen Functionen, der höheren Gleichungen und der Variationsrechnung, sind von dem in seinem Streben zur Förderung der mathematischen Wissenschaften unermüdlichen Gelehrten 14 Abhandlungen in unserem Journale (von Band 34 bis 46) erschienen.


Journal für reine u. angewandte Mathem
Fig.1.
G
-1

